УДК 004.942 (519.217)

ПРОШИН С.Ю.

ОЦІНКА МАТРИЦЬ ПЕРЕХОДІВ ЕНЕРГОНАВАНТАЖЕНЬ НА БАЗІ ПЕРІОДИЧНОГО ЛАНЦЮГА МАРКОВА

В роботі досліджується енергонавантаження з врахуванням його марковості та стохастичної періодичності. В якості математичної моделі запропоновано використовувати періодичний ланцюг Маркова. Описано алгоритм знаходження оцінок матриць переходів. В його основі лежить виділення із періодичного ланцюга елементів однорідності, що дозволяє використати існуючі методи статистичної обробки. Проведено визначення станів системи енергоспоживання і періоду ланцюга з врахуванням особливості енергонавантажень протягом доби і в робочі та вихідні дні. Створено програмне забезпечення, яке реалізує розроблений алгоритм, проведено оцінювання матриць переходів енергонавантажень. Отримані оцінки матриць відображають ймовірнісні особливості поведінки графіків споживання електроенергії і можуть бути використані в задачах прогнозу.

In this paper we research the power supply taking into account its Markov's properties and its stochastic periodicity. As the mathematical model it is suggested to use the periodic Markov chain. Algorithm of finding of estimation of transition matrices is described. In its basis lays the separation of homogeneous elements out from the periodic chain, which allows to use existing methods of statistical processing. We conduct the definition of states of the power supply system and the period of chain with the account of peculiarity of power supply during the day at workdays and weekends. The software on the basis of developed algorithm is created and the estimation of matrices of transition is conducted. Received estimations of matrices reflect the probable peculiarities of behavior of electric power supply graphs and can be used in problems of prognosis.

Вступ

В прикладних дослідженнях часто приходиться мати справу із стохастично- періодичними сигналами та явищами. Як приклад такого сигналу, на рисунку 1 наведено погодинний графік енергонавантаження першого навчального корпусу Тернопільського національного технічного університету ім. І.Пулюя протягом п'яти робочих днів в жовтні 2008 року.

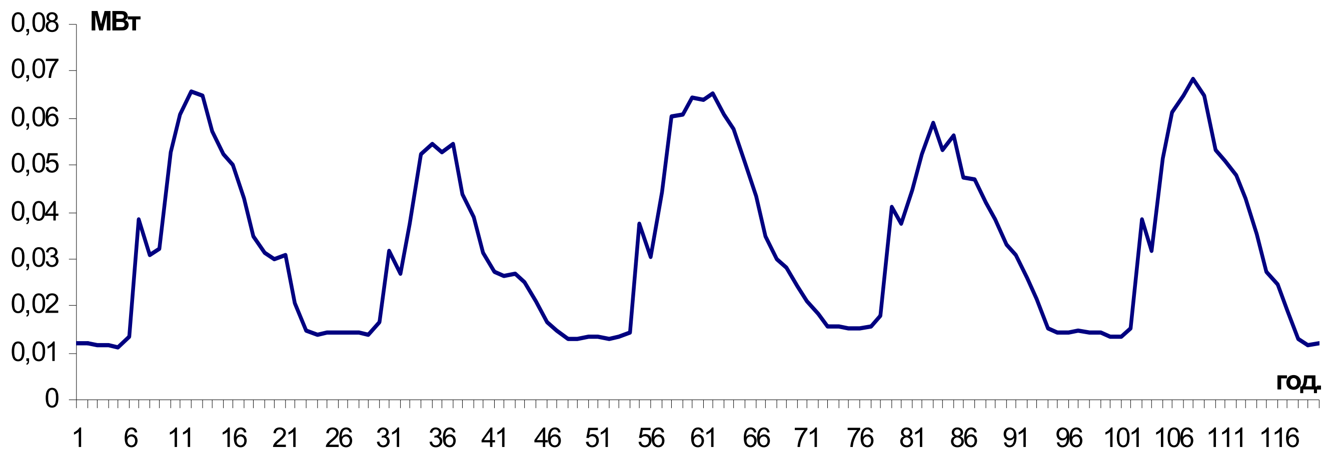

Рис. 1. Погодинний графік споживання електроенергії

Візуальний аналіз графіку показує, що спостерігається «приблизна повторюваність» споживання електроенергії через кожні 24 години. Під стохастичною періодичністю розуміється, що хоча для графіків детермінована періодичність відсутня, але при цьому припускається, що періодично змінюються певні ймовірнісні характеристики сигналу, в даному випадку енергонавантаження

Для дослідження сигналів використовується трьохкроковий підхід «модель-алгоритм-програма». На першому кроці обґрунтовується модель сигналу, в якій враховуються його основні його властивості. На другому кроці на базі моделі розробляються методи і алгоритми обробки сигналів. На третьому – створюється програмне забезпечення для реалізації розроблених алгоритмів.

На даний час в якості математичних моделей стохастично-періодичних сигналів використовувалися періодично корельовано випадкові процеси, періодичні процеси та лінійні періодичні процеси [1].

Перші дві моделі – періодично корельовано та періодичні випадкові процеси є описовими, тобто лише враховують характер зміни ймовірнісних характеристик, лінійні періодичні процеси враховують фізику утворення енергонавантажень, і тому дозволяють більш всесторонньо вивчати їх особливості.

В [2] запропоновано використання моделі, що враховує як стохастичну періодичність так і марковість досліджуваного сигналу у вигляді періодичного марківського процесу. В [3] введено поняття періодичного ланцюга Маркова, який пропонується використати у якості математичної моделі енергонавантаження. Основна причина такого підходу полягає в тому, що енергосистему в цілому чи її окремий енергорегіон можна розглядати як систему масового обслуговування. А вхідні потоки такого роду систем переважно є частинним випадком ланцюгів Маркова. Виникненню періодичності ланцюгів сприяє ритмічний характер функціонування енергорегіонів.

В роботах [4]-[6] проведено теоретичні дослідження, щодо створення методів статистичної обробки сигналів на базі моделі у вигляді періодичного ланцюга Маркова, які полягають у знаходженні оцінок матриць переходів. Однак розроблені методи оцінювання на реальних сигналах не використовувались.

Мета роботи. Знайти оцінки матриць переходів енергонавантажень, використовуючи в якості їх математичної моделі періодичний ланцюг Маркова.

Періодичний ланцюг Маркова та його властивості

Нагадаємо поняття періодичного ланцюга Маркова [3] та його властивості [4].

Означення. Ланцюг Маркова

$$\{\xi_n\},\ n = 0,1,2,... \tag{1}$$

називається періодичним, якщо періодичними є його ймовірності переходів, тобто існує ціле $L > 1$, що

$$p_{ij}^{(k)} = p_{ij}^{(k+L)},\ i, j \in X\ , \tag{2}$$

де i, j – стани, $i, j \in X$.

Очевидно, що для періодичного ланцюга Маркова його матриці переходів $\Pi(k) = \left|p_{ij}^{(k)}\right|$ теж змінюються періодично з цим же періодом L:

$$\Pi^{(k)} = \Pi^{(k+L)},\ k = 0,1,\dots. \tag{3}$$

Із означення також випливає, що періодичний ланцюг визначається першими L матрицями переходів

$$\left\{\Pi_0^{(0)},...,\Pi_0^{(k)},...,\Pi_0^{(L-1)}\right\}. \tag{4}$$

Множину чисел $0,...,k,...L-1$, де L – період ланцюга, позначимо через φ:

$$\varphi = \{0,...,k,...,L-1\}. \tag{5}$$

Множина (5) називається φ-множиною фаз, окремі числа k цієї множини – фазами. Відповідно до (5) множину матриць (4) називається множиною фазових матриць, а окремі матриці $\Pi_s^{(k)} = \Pi_0^{(k)},\ s = 1,2,...$ – фазовими матрицями. Кожна із матриць $\Pi_s^{(k)}$ утворюється ймовірностями (2).

$$\Pi_s^{(k)} = \begin{vmatrix} p_{11}^{(k)} & \dots & p_{1m}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & p_{ij}^{(k)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}^{(k)} & \dots & p_{mm}^{(k)} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

де m – кількість станів системи, $k \in \varphi$ - множині фаз.

Щоб перейти до питання оцінки матриць переходів з використанням реалізацій енергонавантажень необхідно розглянути ще ряд питань.

Визначення станів енергонавантажень і періоду ланцюга

Важливим кроком аналізу енергонавантажень є необхідність вирішення питання визначення станів, тобто фіксованих значень одного або декількох параметрів системи. В якості окремого стану доцільно використати інтервал в який попадає значення кількості спожитої електроенергії за певний проміжок часу.

Зазвичай розглядається періодичний ланцюг Маркова із скінченим числом станів. Щодо енергонавантажень, то їх значення неперервні в певному діапазоні. Для отримання скінченого числа станів поступимо наступним чином. Проаналізуємо значення енергонавантажень за часовий період на якому проводимо оцінювання матриць переходів. Знайдемо максимальне ($E_{\max}$) та мінімальне ($E_{\min}$) значення, спожитої за визначений проміжок часу електроенергії. Діапазон зміни значень $[E_{\min};E_{\max}]$ розіб'ємо на m рівних відрізків, кожний довжиною:

$$\Delta E = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{m}. \qquad (7)$$

В результаті отримаємо сукупність інтервалів:

$$\{[E_0;E_1),\ [E_1;E_2),\ \ldots\ [E_{i-1};E_i),\ \ldots\ [E_{m-1};E_m]\}, \qquad (8)$$

де $[E_{i-1};E_i) = E_{\min} + i\Delta E$

Кожному з інтервалів (8) поставимо у відповідність число x_i, $i = \overline{1,m}$, яке буде визначати стан системи. Якщо в деякий фіксований момент часу t_k значення реалізації енергонавантажень $E(t)$ попадає в інтервал $[E_{i-1};E_i)$ із сукупності (8), то будемо вважати що система знаходиться в стані x_i. Числа x_i, $i = \overline{1,m}$ утворюватимуть фазовий простір системи $X = (x_1,\ldots\ x_i,\ldots\ x_m)$, а ймовірності переходів із стану x_i в стан x_j утворюють матрицю (6).

Проаналізувавши об'єм вибірки вибрано кількість станів системи $m = 3$.

Зауважимо, що при необхідності розбиття діапазону $[E_{\max};E_{\min}]$ може відбуватись і на нерівні інтервали. Також зазначимо, що при виборі більшої кількості станів у фазовому просторі системи модель більш точніше відображати сигнал.

Розглянемо питання вибору періоду ланцюга. Вище було наголошено, що «приблизна повторюваність» енергонавантажень відбувається через часовий проміжок $T = 24$. В нашому випадку значення спожитої електроенергії фіксується з кроком $\Delta t = 1$ год. Тому для періодичного ланцюга Маркова, як моделі енергонавантажень, період дорівнюватиме $L = T/\Delta t = 24/1 = 24$ год.

Відмінності між робочими та вихідними днями

Слід звернути увагу на те, що режими споживання електроенергії у робочі та вихідні дні суттєво відрізняється, що наглядно демонструють графіки оцінок математичного сподівання енергонавантажень з 24 години робочих та вихідних днів у жовтні 2008 року, наведені на рисунку 2.

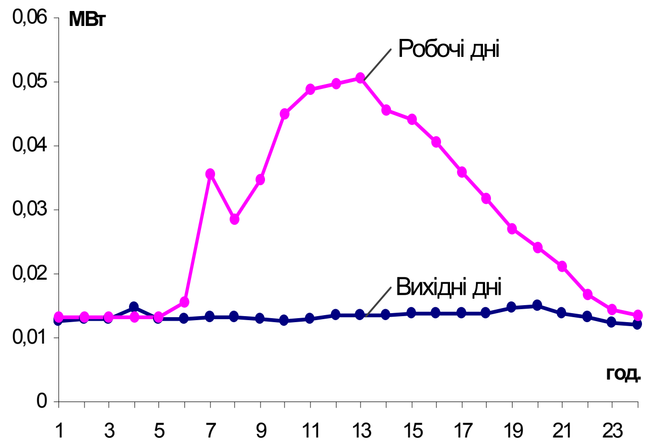

Рис. 2. Оцінки математичного сподівання енергонавантажень

Отже при оцінюванні матриць переходів енергонавантажень необхідно знаходити оцінки матриць окремо для робочих та вихідних днів.

Алгоритм оцінювання матриць переходів

Оцінювання матриць переходів проводимо згідно методу наведеного в роботі [5]

Розглянемо погодинні значення споживання електроенергії, що є реалізацією періодичного ланцюга (1).

$$\{\xi_n\},\ n = 0,1,\ldots,N. \qquad (9)$$

Оскільки період ланцюга Маркова $L = 24$, то на протязі одного циклу виділяємо 24 однорідних $\varphi^{(k)}$-послідовностей, властивості яких описаних в роботі [4]. Така $\varphi^{(k)}$-послідовність буде відповідати вибірці елементів на k-ту годину доби. Кількість відліків $\varphi^{(k)}$-послідовності дорівнюватиме кількості діб.

Із реалізації (9) згідно [4] виділимо k-послідовності пар

$$\left\{\hat{\xi}_s^{(k)}\right\},\ s = 0,1,\ldots,z,\ z = [N/L]. \qquad (10)$$

Оскільки кожна пара $\hat{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$, то послідовність (10) можна записати у вигляді

$$\left\{\left(\xi_0^{(k)}, \xi_0^{(k+1)}\right),\ldots,\left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right),\ldots,\left(\xi_{z-1}^{(k)}, \xi_{z-1}^{(k+1)}\right)\right\}. \qquad (11)$$

В нашому випадку $z = 24$.

Ймовірності переходів між реалізаціями кожної із пар $\hat{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$ визначаються однією і тією ж фазову матрицю переходів $\Pi_0^{(k)}$.

Для того щоб оцінити елемент $p_{ij}^{(k)}, i, j = 1,2,3$, матриці $\Pi_0^{(k)}, k = 0,1,...,23$, в послідовності (11) серед перших елементів $\xi_s^{(k)}$ кожної із пар $\hat{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right), s = 0,1,...,23$, виявляємо ті елементи, значення яких рівні i. Число таких елементів позначаємо через $N_i(k)$. Після цього серед тих пар $\hat{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$, значення перших елементів яких рівні x_i, виявляємо ті пари, значення других елементів $\xi_s^{(k+1)}$ яких рівні x_j. Їх кількість позначаємо через $N_{ij}(k)$.

Оцінку перехідної ймовірності $p_{ij}(k)$ знаходимо за формулою

$$\widetilde{p}_{ij}(k) = \frac{N_{ij}(k)}{N_i(k)}, i, j = 1,2,3. \qquad (12)$$

Провівши наведені обчислення для всіх $k = 0,1,...,23$, знайдено всі оцінки $\widetilde{p}_{ij}(k)$, з яких, в свою чергу, сформовано оцінки фазових матриць переходів $\widetilde{\Pi}_0^{(0)},...,\widetilde{\Pi}_0^{(k)},...,\Pi_0^{(23)}$

Випадок появи нульових рядків в оцінках матриць переходів

Під час проведення прикладних досліджень при знаходжені оцінок матриць переходів виявилось, що деякі рядки містять тільки нульові значення ймовірностей, що не відповідає властивостям перехідних матриць ланцюгів Маркова. Причиною появи таких рядків є те, що в досліджуваній системі на певному кроці k не відбувається перехід в деякий стан r, відповідно матриця переходів $\Pi^{(k)}$ містить r-й стовбець, в якому всі значення ймовірностей переходів дорівнюють нулю, тобто $p_{ir}^{(k)} = 0$, $i = \overline{1,m}$. Як наслідок, на наступному кроці в матриці $\Pi^{(k+1)}$ всі ймовірності переходу із стану r в будь-який інший стан також дорівнюють 0, тобто для r-го рядка матриці переходів $p_{rj}^{(k+1)} = 0$, $j = \overline{1,m}$.

Рядок матриці, в якому всі значення ймовірностей переходів дорівнюють нулю називатимемо нульовим рядком, а рядок, в якому хоча б одне значення ймовірності переходу відмінне від нуля – ненульовим.

Для збереження властивостей матриці переходів необхідно довизначити ймовірності переходів нульового рядка r, тобто присвоїти значення

$$d_{r1}^{(k+1)}, d_{r2}^{(k+1)}, \ldots d_{rm}^{(k+1)}, \qquad (13)$$

причому, необхідно щоб виконувались властивості матриці переходів ланцюга Маркова

$$\sum_{j=1}^{m} p_{rj}^{(k+1)} = 1, \; p_{rj}^{(k+1)} \le 1, \; i = \overline{1,m}. \qquad (14)$$

Було перевірено вплив довизначення нульового рядка на властивості періодичного ланцюга Маркова. Оскільки основною особливістю ланцюгів Маркова є те, що майбутній стан системи не залежить від її попередніх станів, то визначимо яким чином вплине введення значень ймовірностей (13) в оцінці матриці $\widetilde{\Pi}^{(k+1)}$ на те, в якому стані перебуватиме система на наступному кроці $k+2$.

Як відомо [7], матриця переходів за 2 кроки обчислюється наступним чином

$$\Pi^{(k,2)} = \Pi^{(k)} \times \Pi^{(k+1)} \qquad (15)$$

Після проведеня обрахунків виявлено, що в елементах матриці $\Pi^{(k,2)}$ довизначенні значення нульових рядків (13) відсутні, а отже вони не впливають на те, в якому стані перебуватиме система на кроці $k+2$. Аналогічним чином можна показати відсутність впливу довизначення нульових рядків на стан системи, якщо їхня кількість більше одного.

Отже при виборі значень послідовності (13) достатньо враховувати лише умови (14), тому приймемо, що для j-го стовпця матриці значення ймовірностей переходів кожного нульового рядка дорівнюватимуть середньому значенню ймовірностей переходів ненульових рядків даного стовпця, тобто

$$d_{rj}^{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{m-a} p_{ij}^{k+1}}{m-a}, \; j = \overline{1,m}, \qquad (16)$$

де a – кілікість довизначених рядків.

Важливо, що умови (14) в даному випадку виконано і властивості матриць переходів ланцюга Маркова збережено.

Результати оцінювання

Враховуючи описані вище зауваження проведено оцінювання матриць переходів реалізації енергонавантаження в робочі дні Тернопільського національного технічного університету в 2008 році, в результаті чого отримано 24 оцінки, які наведено у таблиці 1.

Табл. 1. Оцінки матриць переходів енергонавантаження

$$\tilde{\Pi}^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(4)} = \begin{vmatrix} 0{,}9786 & 0{,}0214 & 0 \\ 0{,}9786 & 0{,}0214 & 0 \\ 0{,}9786 & 0{,}0214 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(5)} = \begin{vmatrix} 0{,}1092 & 0{,}8908 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}0546 & 0{,}9454 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}^{(6)} = \begin{vmatrix} 0{,}4800 & 0{,}5200 & 0 \\ 0{,}0335 & 0{,}9665 & 0 \\ 0{,}2568 & 0{,}9454 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(7)} = \begin{vmatrix} 0{,}2632 & 0{,}7368 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}1316 & 0{,}9454 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(8)} = \begin{vmatrix} 0{,}6000 & 0{,}4000 & 0 \\ 0 & 0{,}8384 & 0{,}1616 \\ 0{,}3000 & 0{,}6192 & 0{,}0808 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}^{(9)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8144 & 0{,}1856 \\ 0 & 0{,}0270 & 0{,}9730 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(10)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8742 & 0{,}1258 \\ 0 & 0{,}0695 & 0{,}9306 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(11)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9514 & 0{,}0486 \\ 0 & 0{,}2069 & 0{,}7931 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}^{(12)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9936 & 0{,}0064 \\ 0 & 0{,}3553 & 0{,}6447 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(13)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9890 & 0{,}0110 \\ 0 & 0{,}2600 & 0{,}7400 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(14)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0052 & 0{,}9896 & 0{,}0052 \\ 0 & 0{,}4103 & 0{,}5897 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}^{(15)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0097 & 0{,}9563 & 0{,}0340 \\ 0 & 0{,}5833 & 0{,}4167 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(16)} = \begin{vmatrix} 0{,}6667 & 0{,}3333 & 0 \\ 0{,}0190 & 0{,}9810 & 0 \\ 0 & 0{,}9412 & 0{,}0588 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(17)} = \begin{vmatrix} 0{,}8750 & 0{,}1250 & 0 \\ 0{,}0267 & 0{,}9733 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}^{(18)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0996 & 0{,}9004 & 0 \\ 0{,}5498 & 0{,}4502 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(19)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2462 & 0{,}7538 & 0 \\ 0{,}6231 & 0{,}3769 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(20)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5467 & 0{,}4533 & 0 \\ 0{,}7733 & 0{,}2267 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}^{(21)} = \begin{vmatrix} 0{,}9699 & 0{,}0301 & 0 \\ 0{,}7794 & 0{,}2206 & 0 \\ 0{,}8746 & 0{,}1254 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(22)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}9500 & 0{,}0500 & 0 \\ 0{,}9750 & 0{,}0250 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\Pi}^{(23)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Оцінки матриць переходів характеризують особливості поведінки споживання електроенергії в кожну годину доби. Аналіз оцінок матриць $\tilde{\Pi}_0^{(22)}, \tilde{\Pi}_0^{(23)}, \tilde{\Pi}_0^{(0)}, \ldots \tilde{\Pi}_0^{(4)}$, які відповідають нічним годинам доби, показує, що споживання електроенергії є низьким і носить стаціонарний характер. Матриці $\tilde{\Pi}_0^{(5)}, \ldots \tilde{\Pi}_0^{(8)}$ свідчать про зростання енергонавантаження, яке, як видно з матриць $\tilde{\Pi}_0^{(10)}, \ldots \tilde{\Pi}_0^{(15)}$, набуває високих значень вдень, причому найбільші ймовірності переходу в стан з високим споживанням електроенергії спостерігаються в матриці $\tilde{\Pi}_0^{(13)}$. Після цього енергонавантаження поступово зменшується, про що свідчать матриці $\tilde{\Pi}_0^{(16)}, \ldots \tilde{\Pi}_0^{(21)}$. Описані особливості підтверджуються графіком на рисунку 2. Однак зауважимо, що оцінка математичного сподівання не показує можливі сплески на графіку енергонавантаження, проте можливість такої поведінки енергосистеми проглядається у оцінках ймовірностей переходів.

Висновки

Отримані результати підтверджують теоретичні положення про можливість використання для опису енергонавантажень періодичних ланцюгів Маркова. Аналіз знайдених в роботі оцінок матриць переходів показує, що вони відображають ймовірнісні особливості поведінки графіків споживання електроенергії і можуть бути використані в задачах прогнозу. Методи оцінювання перехідних матриць періодичного ланцюга Маркова можуть бути успішно застосовані для дослідження стохастичних періодичних сигналів марківського типу.

Перелік посилань

1. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис докт. техн. наук: 05.13.06 /Київ: НАУ, 2001. – 34 с.

2. Приймак М.В. Марківські періодичні процеси / М.В. Приймак // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 3. – С. 17–21.
3. Приймак М.В. Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень / М.В. Приймак // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3–7.
4. Приймак М. Елементи однорідності для періодичних ланцюгів Маркова / М. Приймак, С. Прошин // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 2. — С. 114–123
5. Приймак М.В. Оцінювання матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова Маркова / М.В. Приймак, С.Ю. Прошин // ISSN 1990-558 Електроніка та системи управління. 2009. – №3(21). – С. 26–33.
6. Приймак М. Похибка оцінок матриць переходів періодичного ланцюга Маркова / Приймак М., Віцентій О., Прошин С. // Вісник ТНТУ. — 2010. — Том 15. — № 3. — С. 150-159.
7. Ширяев А.Н. Вероятность. Учебное пособие для вузов / Ширяев А.Н. – М.: Наука, 1980. – 576 с.