УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
МИСЮРА Е.Б.

МИНИМИЗАЦИЯ СУММАРНОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ НЕЗАВИСИМЫХ ЗАДАНИЙ С ОБЩИМ ДИРЕКТИВНЫМ СРОКОМ ИДЕНТИЧНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ, МОМЕНТЫ ЗАПУСКА КОТОРЫХ ПРОИЗВОЛЬНЫ

Рассматривается задача составления расписания выполнения независимых заданий с общим директивным сроком и равными весами при произвольных моментах запуска приборов. Предложен ПДС-алгоритм решения задачи, сформулированы признаки оптимальности полиномиальной составляющей алгоритма, получена оценка отклонения получаемых решений от оптимального. Приведен пример решения задачи.

The problem of scheduling independent tasks with a common due date and equal weights in the case of arbitrary starting times of machines is considered. The PDC-algorithm to solve it is proposed. The optimality signs of the polynomial component of the algorithm are formulated. The upper bound of deviation of a solution from optimum is obtained. An example of the problem solution is given.

Введение

ПДС-алгоритмы [1] базируются на идеях выделения полиномиальной составляющей алгоритма и экспоненциального подалгоритма. С этой целью для каждого алгоритма выводятся логико-аналитические условия, проверяемые в процессе решения произвольной индивидуальной труднорешаемой задачи, в случае выполнения которых данная произвольная индивидуальная задача точно решается полиномиальным подалгоритмом.

Существуют два типа ПДС-алгоритмов. В первом типе экспоненциальная составляющая представлена либо аппроксимацией полиномиальной составляющей, либо аппроксимирующим экспоненциальным алгоритмом с верхней заранее заданной оценкой числа итераций (или ограничением по времени решения задачи). В результате получаем: а) оптимальное значение функционала, если в процессе выполнения алгоритма реализованы признаки оптимальности получаемых решений; б) приближенное решение с оценкой отклонения от оптимального; в) эвристическое решение, если такая оценка не может быть получена.

В ПДС-алгоритмах второго типа экспоненциальная составляющая представлена экспоненциальным подалгоритмом, построенным на теоретически обоснованных направленных перестановках и эффективных отсечениях. В результате решения задачи либо реализуется полиномиальная составляющая алгоритма, либо после выполнения всех направленных перестановок и отсечений получаем решение, оптимальность которого доказана в соответствующих теоремах.

Алгоритм решения исследуемой ниже задачи относится к ПДС-алгоритмам первого типа.

Постановка задачи МСЗПО

Задано множество заданий $J = \{1, 2,..., n\}$, m приборов равной производительности, для каждого задания $j \in J$ известна длительность выполнения l_j. Все задания имеют общий директивный срок d. Моменты запуска приборов на выполнение работ $T_i \gtreqless d$, $i = \overline{1,m}$, различны. Простои приборов при выполнении заданий запрещены.

Необходимо построить расписание σ выполнения заданий $j \in J$ на m приборах такое, чтобы достигался минимум функционала:

$$F(\sigma) = \sum_{j \in J} \max[0; C_j(\sigma) - d],$$

где $C_j(\sigma)$ – момент завершения выполнения задания j в последовательности σ.

Сформулированная задача относится к классу NP-трудных [2]. В [1] представлен ПДС-алгоритм решения сформулированной задачи при условии, что моменты запуска приборов одинаковы (МСЗП). Для удобства изложения материала приведем основные теоретические результаты по решению задачи, приведенной в [1].

Алгоритм построения начального расписания. Пронумеруем задания множества $J = \{1, 2,..., n\}$ по неубыванию значений l_j, а приборы – по неубыванию значений T_i. На первом шаге выбираем задание j с минимальным l_j и назначаем на прибор i с минимальным T_i. Определяем время освобождения прибора i:

$T_i^{осв} = T_i^{осв} + l_j$. Далее выбираем очередное задание для назначения на выполнение и назначаем на прибор с минимальным временем освобождения $T_i^{осв}$. Такую процедуру выполняем до тех пор, пока не будут распределены на выполнение все задания. Обозначим полученное расписание через $\sigma^{уп}$.

Поиск оптимального расписания в соответствии с известной теоремой можно ограничить рассмотрением расписаний, при которых каждый прибор обслуживает задания в порядке возрастания их номеров [3].

Действительно, если в оптимальной последовательности $\sigma_i^* = (j_1^*, j_2^*, ..., j_n^*)$ для некоторых заданий j_k, j_{k+1} выполняется $l_{j_k} > l_{j_{k+1}}$, то последовательности σ_i, отличающейся от σ_i^* транспонированием элементов j_k^* и j^*_{k+1}, соответствует меньшее значение рассматриваемого функционала, что противоречит предположению об оптимальности σ_i^*.

Используемые обозначения:

$P_i(\sigma)$ – множество незапаздывающих заданий в расписании прибора i;

$S_i(\sigma)$ – множество запаздывающих заданий в расписании прибора i, для которых выполняются условия:

$$S_j^н < d,\ C_j > d,\ \forall j \in S_i(\sigma),$$

где $S_j^н$ — момент начала выполнения задания j;

$Q_i(\sigma)$ – множество запаздывающих заданий в расписании прибора i, для которых выполняются условия:

$$S_j^н < d,\ \forall j \in Q_i(\sigma),$$

$$P = \bigcup_{i=\overline{1,m}} P_i;\ S = \bigcup_{i=\overline{1,m}} S_i;\ Q = \bigcup_{i=\overline{1,m}} Q_i;$$

$R_i(\sigma)$ – резерв времени прибора i в расписании σ

$$R_i(\sigma) = d - \sum_{j \in P_i(\sigma)} l_j;$$

$\Delta_i(\sigma)$ – запаздывание в выполнении задания $j \in S_i(\sigma)$ относительно директивного срока:

$$\Delta_i = \sum_{j \in P_i(\sigma) \bigcup S_i(\sigma)} l_j - d.$$

Для случая равных T_i в [3] сформулирована теорема, определяющая класс расписаний, который содержит оптимальное решение по рассматриваемому функционалу на множестве всех возможных расписаний, построенных для фиксированного множества заданий J. Используем для удобства изложения принятые нами обозначения.

Теорема 1 [3]. Существует оптимальное расписание, при котором выполняются условия:

1) $P \bigcup S = \{1, 2, ..., |P \bigcup S|\}$;

2) если $P \bigcup S < n$, то $\sum_{j \in P_i \bigcup S_i} l_j \ge d$, и $Q_i \setminus S_i$ содержит те и только те элементы, которые отличаются от $|P \bigcup S| + i$ на величину, кратную m, $i = \overline{1,m}$.

Обозначим через Ψ_{PS} класс расписаний, удовлетворяющий условию теоремы 1. Выделим из класса Ψ_{PS} класс расписаний $\Psi_P \in \Psi_{PS}$, удовлетворяющий дополнительно следующим условиям:

1) $P = \{1, 2, ..., |P|\}$;

2) $\min_{j \in S(\sigma)} l_j > \max_{i=\overline{1,m}} R_i(\sigma)$;

3) $S_{j_k}^H \le S_{j_l}^H$, если $l_{j_k} \le l_{j_l}$, $\forall j_k, j_l \in S(\sigma)$.

Пусть $|P| < n$. Обозначим: $P_{\min}$ – минимальное количество заданий множества P, при котором $\Psi_P \ne \varnothing$; $P_{\max}$ – максимальное количество заданий множества P.

В следующих утверждениях обосновывается построение структуры ПДС-алгоритма и определяются правила направленных перестановок, выполняемых в процессе его реализации.

Утверждение 1 [1]. Для всех возможных расписаний $\sigma \in \Psi_P$, построенных на множестве заданий J, справедливо: $P_{\max} - P_{\min} < m$.

Утверждение 2 [1]. При построении оптимального расписания в результате направленных перестановок возможны перемещения заданий только между множествами $P(\sigma)$ и $S(\sigma)$.

Утверждение 3 [1]. При перестановке задания $j \in P(\sigma)$ с прибора i_k с бóльшим числом запаздывающих заданий на прибор i_l с меньшим числом запаздывающих заданий уменьшается Δ_{i_k} на величину, равную l_j.

Утверждение 4 [1]. Максимальная разность количества запаздывающих заданий на приборах в расписаниях $\sigma \in \Psi_P$ не превышает единицы.

На основании следующих теорем обосновываются признаки оптимальности получаемых расписаний, определяется основная характеристика получаемых расписаний, которая показывает, на сколько можно теоретически уменьшить значение функционала, чтобы получить оптимальное расписание.

Определение 1. Расписание с одинаковым числом запаздывающих заданий на приборах назовем равномерным.

Теорема 2 [1]. Равномерное расписание $\sigma \in \Psi_P$ является оптимальным.

Введем обозначения:

$L_{\max}$ – максимальное число запаздывающих заданий на приборах;

$L_{\min}$ – минимальное число запаздывающих заданий на приборах;

$i=\overline{1,k}$ – приборы с числом запаздывающих заданий $L_{\max}$;

$|P(\sigma)| = P$ – мощность множества $P(\sigma)$;

$\Delta_\Sigma(\sigma) = \sum_{i=1}^{k}\Delta_i$;

$R_\Sigma(\sigma) = \sum_{i=k+1}^{m} R_i$; $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\}$.

Теорема 3 [1]. Если в расписаниях $\sigma \in \Psi_P$, $\sigma' \in \Psi_P$, построенных на заданном множестве заданий J, максимальное число запаздывающих заданий одинаково, то при $R_\Sigma(\sigma) \neq 0$ и $R_\Sigma(\sigma') \neq 0$ справедливо: $R_\Sigma(\sigma) - R_\Sigma(\sigma') = \Delta_\Sigma(\sigma) - \Delta_\Sigma(\sigma')$.

Теорема 4. Для любых двух расписаний $\sigma \in \Psi_P$ и $\sigma' \in \Psi_P$ справедливо следующее:

$$F(\sigma) - F(\sigma') = \Omega_\Sigma(\sigma) - \Omega_\Sigma(\sigma'). \qquad (1)$$

Теорема 5. Если в расписании $\sigma \in \Psi_P$ выполняется $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\} = 0$, то расписание σ оптимально.

Величина $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\}$ является основной характеристикой расписания $\sigma \in \Psi_P$, где $\Delta_\Sigma(\sigma)$ показывает, на сколько можно теоретически уменьшить значение функционала $F(\sigma)$, чтобы получить оптимальное расписание. Суммарный резерв $R_\Sigma(\sigma)$ показывает, какие резервы существуют для получения оптимального расписания.

Утверждение 5. Пусть $\sigma \in \Psi_P$, тогда если $\Delta_\Sigma(\sigma) = 0$, то $\Omega_\Sigma(\sigma) = 0$.

Теорема 6. Для расписания $\sigma \in \Psi_P$ справедливо следующее соотношение:

$$F(\sigma) - F(\sigma^*) \leq \Omega_\Sigma(\sigma).$$

где σ^* – оптимальное расписание выполнения множества заданий J.

Таким образом, для расписаний $\sigma \in \Psi_P$ величина $\Omega_\Sigma(\sigma)$ является оценкой отклонения значения суммарного запаздывания оптимального расписания.

Утверждение 6. Для расписаний $\sigma \in \Psi_P$ выполняется $\Omega_\Sigma(\sigma) \leq \Delta_\Sigma(\sigma)$.

На основании следующих теорем и утверждений обосновываются характеристики расписаний, получаемых в результате перестановок, выполняемых в произвольном порядке и уменьшающих $\Delta_\Sigma(\sigma)$, и, следовательно, $R_\Sigma(\sigma)$ [1]. Эти перестановки последовательно выполняются с некоторого расписания $\sigma \in \Psi_P$ и осуществляются посредством переноса незапаздывающих заданий между приборами I_Δ и I_R в текущем расписании σ_k, где $I_R(\sigma)$ – множество номеров приборов расписания σ, на которых запаздывает меньшее число заданий; $I_\Delta(\sigma)$ – множество номеров приборов расписания σ, на которых запаздывает большее число заданий. При этом порядок выполнения работ на приборах, кроме указанных выше, не изменяется. В результате проведенной перестановки в полученном расписании σ_{k+1} может измениться количество запаздывающих заданий только на одном из приборов из множества $I_\Delta(\sigma_k)$ с номером i_1 и на одном приборе из множества $I_R(\sigma_k)$ с номером i_2. Перестановка является запрещенной, если в расписании σ_{k+1} количество заданий на приборе i_2 больше количества заданий на приборе i_1.

Обозначим класс таких расписаний через $\Psi(\sigma_P)$.

Теорема 7. Для любого расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ справедлива оценка отклонения показателя качества от оптимального значения:

$$F(\sigma) - F(\sigma^*) \leq \Omega_\Sigma(\sigma).$$

Следствие. Для расписаний $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ справедливы теоремы 5, 6 и утверждение 6.

Таким образом, в расписаниях $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ изменение значения функционала так же, как и в расписаниях $\sigma \in \Psi_P$, определяется величинами $\Delta_\Sigma(\sigma)$, $R_\Sigma(\sigma)$.

Теорема 8. Если в расписании $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\}$ достигает наименьшего значения, то расписание σ оптимально.

В следующих утверждениях, доказательство которых очевидно, сформулированы свойства, характеризующие задания $j \in S \cup Q$ в расписаниях $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$.

Утверждение 7. Пусть $S'_k(\sigma) \cup Q'_k(\sigma)$, $S''_l(\sigma) \cup Q''_l(\sigma)$ – множества запаздывающих заданий на приборах k и l, соответственно. В расписаниях, полученных в результате перестановки множеств запаздывающих заданий между приборами, то есть при выполнении $S''_k(\sigma) \cup Q''_k(\sigma)$, $S'_l(\sigma) \cup Q'_l(\sigma)$, отклонение показателя качества от оптимального расписания определяется функцией $\Omega_\Sigma(\sigma) = \min\{R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\}$.

Пусть на приборах k, l, r в расписании σ задания $j \in S \cup Q$ пронумерованы следующим образом: $j_k, j_{k+m}, j_{k+2m}, \ldots, j_l, j_{l+m}, j_{l+2m}, \ldots, j_r, j_{r+m}, j_{r+2m}, \ldots$

Определение 2. Задания j_k, j_l, j_r, или $j_{k+m}, j_{l+m}, j_{r+m}, \ldots$ или $j_{k+2m}, j_{l+2m}, j_{r+2m}, \ldots$ назовем запаздывающими заданиями одного уровня.

Утверждение 8. На приборах с одинаковым числом запаздывающих заданий задания одного уровня можно менять местами. При таких перестановках значение функционала (показателя качества) не изменяется.

Утверждение 9. От расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ всегда можно перейти к расписанию $\sigma \in \Psi_{PS}$ с тем же значением показателя качества посредством перестановки запаздывающих заданий одного уровня.

Описание ПДС-алгоритма решения задачи МСЗП

В [1] представлены два ПДС-алгоритма решения задачи МСЗП, которые включают полиномиальную составляющую и приближенный алгоритм и строятся только на направленных перестановках. Полиномиальная составляющая алгоритма задается детерминированной процедурой последовательного выполнения направленных перестановок, общее количество которых ограничено полиномом от числа заданий и количества приборов. В результате решения задачи получаем либо строго оптимальное решение полиномиальной составляющей алгоритма (если в процессе вычислений удовлетворялось одно из условий оптимальности), либо приближенное с верхней оценкой отклонения от оптимального.

Полученные в результате исследования свойств задачи признаки оптимальности ее решения справедливы и эффективны как в случае приближенных алгоритмов, так и в случае реализации экспоненциальной составляющей алгоритма.

Структура экспоненциальной составляющей ПДС-алгоритма.

Экспоненциальный подалгоритм состоит из следующих основных блоков [1]:

Блок I. Построение начального расписания $\sigma_0 \in \Psi_P$. Если $\Omega_\Sigma(\sigma_0) = 0$, то расписание оптимально, конец. Иначе: 1) если $R_\Sigma(\sigma_0) \geq \Delta_\Sigma(\sigma_0)$, переходим к выполнению блока II; 2) если $R_\Sigma(\sigma_0) < \Delta_\Sigma(\sigma_0)$, переходим к блоку III.

Блок II. Построение равномерного расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ с числом запаздывающих заданий на каждом приборе i, равном $L(\sigma) = L(\sigma_0) - 1$, где $L(\sigma_0)$ – максимальное число запаздывающих заданий на одном приборе в расписании σ_0. Если такое расписание найдено, то оно оптимально, конец. Иначе идем на блок IV.

Блок III. Построение равномерного расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ с числом запаздывающих заданий на каждом приборе, равным $L(\sigma) = L(\sigma_0)$.

Блок IV. Построение расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$, для которого $\Omega_\Sigma(\sigma) < \Omega_\Sigma(\sigma_0)$. Если $\Omega_\Sigma(\sigma) = 0$, то расписание оптимально, конец; иначе идем на выполнение блока V.

Блок V. Построение расписания $\sigma \in \Psi_{PS}$, для которого $\Omega(\sigma) < \Omega(\sigma_0)$. Конец.

Каждый блок включает только улучшающие перестановки заданий между приборами [1]. После выполнения каждого блока проверяются признаки оптимальности получаемых решений, и если они выполняются, то получено оптимальное решение, иначе переходим к следующему блоку. Такие процедуры сначала выполняются для отдельных заданий, а затем для групп заданий. С этой целью формируются группы, включающие два, три и более задания. В результате работы алгоритма либо получаем оптимальное решение задачи, либо алгоритм прекращает работу после заданного числа итераций или заданного времени работы и определяется оценка отклонения полученного решения от оптимального.

На основании приведенных теоретических результатов в [1] разработан эффективный ПДС-алгоритм решения задачи МСЗП. Алгоритм состоит из двух этапов: Этап 1 (Алгоритм А0) – построение начального расписания $\sigma^{уп}$. Этап 2 (Алгоритм А) – построение оптимального расписания σ^*.

Описание Алгоритма А0.

1. Пронумеруем задания множества $J = \{1, 2, ..., n\}$ по неубыванию значений l_j.

2. Пронумеруем приборы по неубыванию значений T_i.

3. Полагаем $T_i^{осв} = T_i \ \forall i = \overline{1, m}$.

4. Выбираем задание j с минимальным l_j из неназначенных заданий и назначаем на прибор i с минимальным временем освобождения $T_i^{осв}$.

5. Определяем новое время освобождения прибора i: $T_i^{осв} = T_i^{осв} + l_j$.

6. Если распределены на выполнение все задания, конец алгоритма. Иначе переход на п. 4.

Обозначим полученное расписание через $\sigma^{уп}$.

В Алгоритме А используются следующие типы перестановок.

Перестановка 1*P*-0*P*-Δ. С прибора $h \in I_\Delta(\sigma)$ на прибор $r \in I_R(\sigma)$ перемещается задание j такое, что $l_j \geq \Delta h(\sigma)$, $l_j \leq R_r(\sigma)$.

Перестановка 1*P*-0*P*-*R*Δ. С прибора $h \in I_\Delta(\sigma)$ на прибор $r \in I_R(\sigma)$ перемещается задание j такое, что $l_j < \Delta h(\sigma)$, $l_j > R_r(\sigma)$.

Перестановка 1*P*-0*P*-*R*. С прибора $h \in I_\Delta(\sigma)$ на прибор $r \in I_R(\sigma)$ перемещается задание j такое, что $l_j \leq \Delta h(\sigma)$, $l_j \leq R_r(\sigma)$.

Описание Алгоритма А.

Блок I. Построение начального расписания.

1. Построение начального расписания $\sigma^{уп} \in \Psi_P$ по Алгоритму А0.

2. Определяем $\Omega_\Sigma(\sigma^{уп})$. Если $\Omega_\Sigma(\sigma^{уп}) = 0$, то расписание $\sigma^{уп}$ оптимально, конец алгоритма. В противном случае переходим к пункту 3.

3. Если $R_\Sigma(\sigma) \geq \Delta_\Sigma(\sigma)$, выполняем пункт 4. Иначе полагаем $\sigma = \sigma^{уп}$, переходим к п. 9.

Блок II. Построение равномерного расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ с числом запаздывающих заданий на каждом приборе i, равном $L(\sigma) = L(\sigma^{уп}) - 1$.

4. Полагаем $\sigma = \sigma^{уп}$, $h = 1$, $f = f(\sigma)$, где f – количество приборов с большим числом запаздывающих заданий.

5. Если для прибора h возможна перестановка 1P-0P-Δ, то выполняем ее. Получаем расписание σ'. Переходим к п. 6, в случае отсутствия перестановки переходим к п. 7.

6. Полагаем $h = h + 1$. Если $h \leq f$, переходим к п. 5, иначе к п. 8.

7. Если для прибора h возможна перестановка 1P-0P-R, то выполняем ее. Переходим к п. 6.

8. Если $\Omega_\Sigma(\sigma) = 0$, то реализовалась полиномиальная составляющая алгоритма, расписание σ оптимально. Определяем значение оптимизируемого функционала. Иначе определяем значение оценки W отклонения функционала от оптимального, конец алгоритма.

Блок III. Построение равномерного расписания $\sigma \in \Psi(\sigma_P)$ с числом запаздывающих заданий на каждом приборе i, равном $L(\sigma) = L(\sigma^{уп})$.

9. Полагаем $r = f(\sigma) + 1$.

10. Если для прибора r возможна перестановка 1P-0P-RΔ, выполняем ее. Получаем расписание σ', переходим к п. 11. В противном случае переходим к п. 12.

11. Полагаем $r = r + 1$. Если $r \leq m$, идем на п. 10, иначе на п. 13.

12. Если для прибора r возможна перестановка 1P-0P-R, выполняем ее, получаем расписание σ'. Переходим к п. 11.

13. Если $\Omega_\Sigma(\sigma) = 0$, то реализовалась полиномиальная составляющая алгоритма, расписание σ оптимально. Определяем значение оптимизируемого функционала. Иначе определяем значение оценки W отклонения функционала от оптимального, конец алгоритма.

Трудоемкость алгоритма А определяется полиномом $O(mn \log n)$.

Исследование свойств задачи МСЗПО

Построим начальное расписание $\sigma^{уп} \in \Psi_P$ по Алгоритму А0. Условно разобьем полученное расписание $\sigma^{уп}$ на σ^1 и σ^2, где σ^1 – расписание выполнения заданий на приборах, для которых $T_i < d$, а σ^2 – расписание выполнения заданий на приборах, для которых $T_i \geq d$.

Утверждение 10. Максимальная разность количества запаздывающих заданий на приборах в расписании σ^1 не превышает единицы.

Утверждение 11. Количество запаздывающих заданий на каждом из приборов, для которых $T_i < d$, больше или равно количеству запаздывающих заданий на каждом из приборов, для которых $T_i \geq d$.

Справедливость утверждений 10 и 11 основана на алгоритме построения последовательности $\sigma^{уп}$.

Теорема 9. В расписании $\sigma^{уп}$ не существует перестановок заданий, выполняемых между приборами $i \in \sigma^1$ и $i \in \sigma^2$, приводящих к уменьшению значения функционала.

Доказательство основано на утверждениях 1–3 и 11, следствии теоремы 1 и известной теореме [3], в соответствии с которой поиск оптимального расписания можно ограничить рассмотрением расписаний, при которых каждый прибор обслуживает задания в порядке возрастания их номеров.

Следствие теоремы 1 [3]. Пусть обслуживание заданий L-м прибором не может быть начато раньше момента времени $T_L > 0$, $L = \overline{1,M}$. Расписанию σ, при котором каждое очередное задание $k = 1, 2, \ldots, n$ назначается на обслуживание на тот прибор, который раньше других оказывается свободным, соответствует наименьшее значение суммы времен завершения обслуживания всех заданий.

Рассмотрим расписание на приборах $i_r \in \sigma^1$ и $i_s \in \sigma^2$. Пусть задание j_k выполняется на приборе i_r, а задание j_p – на приборе i_s, причем задания j_k и j_p принадлежат одному уровню запаздывающих заданий. Для этих заданий выполняется: $l_{j_k} \leq l_{j_p}$, в соответствии с алгоритмом построения последовательности $\sigma^{уп}$. Поменяем эти задания местами, т.е. задание j_k будет выполняться на приборе i_s, а задание j_p – на приборе i_r. В результате такой перестановки, в соответствии с утверждением 11, значение функционала увеличивается. Перестановки запаздывающих заданий, принадлежащих разным уровням запаздывания, в соответствии со следствием теоремы 1 [3], также приводит к увеличению значения функционала. В соответствии с утверждениями 1–3, задания $j \in \sigma^2$ не могут быть перемещены в множества заданий P или S. Следовательно, в расписании $\sigma^{\text{уп}}$ не существует улучшающих перестановок между последовательностями σ^1 и σ^2. Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема, доказательство которой очевидно.

Теорема 10. Значение функционала по задаче МСЗПО равно сумме значений функционала последовательностей σ^1 и σ^2.

ПДС-алгоритм решения задачи МСЗПО

1. Построение начального расписания $\sigma^{\text{уп}}$ по Алгоритму А0.
2. Разбиваем полученное расписание $\sigma^{\text{уп}}$ на σ^1 и σ^2, где σ^1 – расписание выполнения заданий на приборах, для которых $T_i < d$, а σ^2 – расписание выполнения заданий на приборах, для которых $T_i \geq d$.
3. Выполнение ПДС-алгоритма А, приведенного выше, на последовательности σ^1.
4. Анализ полученного решения. Если реализовалась полиномиальная составляющая алгоритма, расписание σ^1 оптимально, переход на п. 5. Иначе переход на п. 6.
5. Определение значения функционала для последовательности σ^1. Переход на п. 7.
6. Определение значения функционала и оценки отклонения значения функционала от оптимального для последовательности σ^1.
7. Определение значения функционала последовательности σ^2, оптимальной по построению.
8. Определение значения функционала задачи МСЗПО в соответствии с теоремой 10. Конец.

Пример. Исходные данные: число приборов $m = 5$, число заданий $n = 25$, общий директивный срок $d = 10$, длительности заданий l_j:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
l_j	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5
j	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
l_j	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	

Значения моментов запуска приборов T_i:

i	1	2	3	4	5
T_i	0	1	2	10	15

В табл. 1 приведено начальное расписание $\sigma^{\text{уп}}$ (иллюстрируется рис. 1), в табл. 2 – оптимальное расписание σ^* (рис. 2), в таблицах C_j – момент окончания выполнения задания j, F – величина запаздывания относительно директивного срока для запаздывающих заданий.

Табл. 1 – Начальное расписание $\sigma^{\text{уп}}$

i	j	l_i	d	C_j	F	i	j	l_i	D	C_j	F
1	1	1	10	1		2	25	9	10	32	22
4	4	2	10	3		3	3	1	10	3	
1	7	3	10	6		3	6	2	10	5	
1	10	4	10	10		3	9	3	10	8	
1	13	5	10	15	5	3	12	4	10	12	2
1	17	6	10	21	11	3	16	6	10	18	8
1	22	8	10	29	19	3	21	7	10	25	15
2	2	1	10	2		4	14	5	10	15	5
2	5	2	10	4		4	18	6	10	21	11
2	8	3	10	7		4	23	8	10	29	19
2	11	4	10	11	1	5	19	7	10	22	12
2	15	5	10	16	6	5	24	8	10	30	20
2	20	7	10	23	13						

$F_\Sigma(\sigma^{\text{уп}}) = 169$. Задание 2 с прибора 2 переносим на прибор 3. Получаем расписание σ^*:

Табл. 2 – Оптимальное расписание σ^*

i	j	l_i	d	C_j	F	i	j	l_i	d	C_j	F
1	1	1	10	1		3	2	1	10	3	
4	4	2	10	3		3	3	1	10	4	
1	7	3	10	6		3	6	2	10	6	
1	10	4	10	10		3	9	3	10	9	
1	13	5	10	15	5	3	12	4	10	13	3
1	17	6	10	21	11	3	16	6	10	19	9
1	22	8	10	29	19	3	21	7	10	26	16
2	5	2	10	3		4	14	5	10	15	5
2	8	3	10	6		4	18	6	10	21	11
2	11	4	10	10		4	23	8	10	29	19
2	15	5	10	15	5	5	19	7	10	22	12
2	20	7	10	22	12	5	24	8	10	30	20
2	25	9	10	31	21						

$F_\Sigma(\sigma^*) = 168$. Полученное расписание оптимально, т.к. $R_\Sigma(\sigma^1) = 0$. Построено равномерное расписание для σ^1 (приборы 1–3).

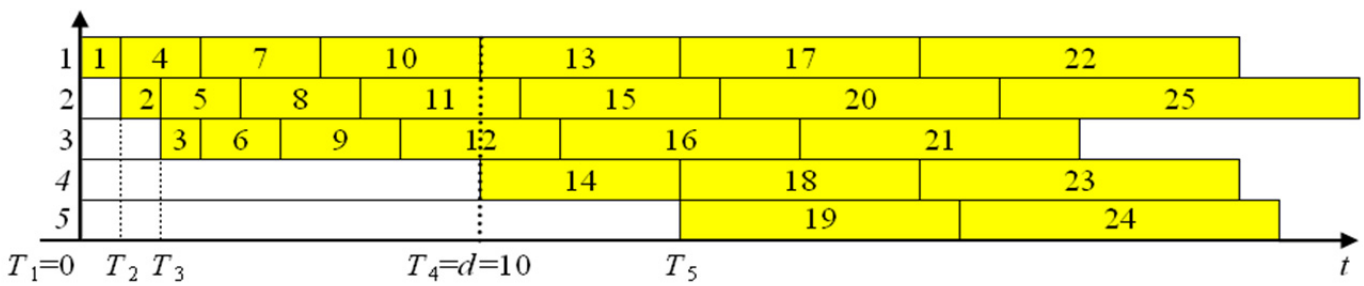

Рис. 1 – Начальное расписание $\sigma^{\text{уп}}$

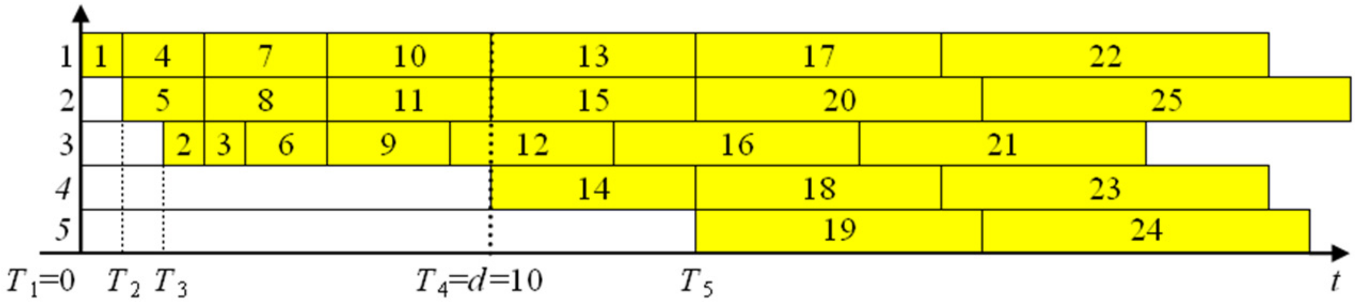

Рис. 2 – Оптимальное расписание σ^*

Выводы

Приведены основные теоретические результаты и ПДС-алгоритм решения задачи для случая, когда моменты запуска приборов одинаковы [1]. Исследованы теоретические свойства задачи МСЗПО. Получены признаки оптимальности полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма, оценка отклонения от оптимального для экспоненциальной составляющей, приведен ПДС-алгоритм решения задачи, включающий ПДС-алгоритм решения задачи МСЗП с трудоемкостью O(mn log n). Приведен пример.

Список литературы

1. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография.– К.: Наукова думка. – 2010. – 573 с.
2. Гери М.Р., Джонсон Д.С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
3. Танаев В.С., Шкурба В.В. Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975.– 256 с.