УДК 004 (517.5)

*ПРИЙМАК М.В.,*
*ВАСИЛЕНКО Я.П.,*
*ДМИТРОЦА Л.П.*

# СИГНАЛИ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ЇХ МОДЕЛЬ

В роботі звернена увага на те, що хоча в прикладних дослідженнях зустрічаються сигнали (емпіричні функції) із змінним періодом, проте теорія та методи дослідження таких сигналів на даний час відсутні. У зв’язку з цим в статті вирішується одна із основних задач на шляху побудови теорії сигналів із змінним періодом – обґрунтовується модель таких сигналів у вигляді функції із змінним періодом та розглядаються деякі властивості періоду. Наведено також аналітичні приклади таких функцій – це тригонометричні функції із змінним періодом та записані формули їх періодів. Отримані результати є важливим кроком до розробки конструктивної теорії функцій із змінним періодом, зокрема побудови теорії рядів Фур'є таких функцій.

The article stresses that though some signals (empirical functions) with a variable period occur in the applied research, there is neither theory nor methods of research of such signals at present. Due to this the article is solving one of the main tasks on the way to the signals theory with a variable period development, namely a model of such signals as a function with a variable period is substantiated and some characteristics of period are considered. The analytical examples of such functions, i.e. trigonometrical functions with a variable period are given, and the formulae of their periods are derived. The received results is an important step to the development of the structural function theory with a variable period, namely the development of Fourier series theory of such functions.

## 1. Вступ

Крім періодичних сигналів (емпіричних функцій), період яких без будь-яких застережень вважається постійним, в прикладних дослідженнях зустрічаються сигнали, які теж можна вважати періодичними, однак при наступній умові: їх період вже не є постійним, а певним чином змінюється. Яскравим приладом тут є добре всім відома електрокардіограма, але отримана не в стані спокою, а після дії на пацієнта певного збудника, найпростіше – фізичного навантаження. Приклад такої електрокардіограми поданий на рис. 1.

Як вивчати сигнали із змінним періодом? Як це не дивно, але огляд наукових джерел засвідчує, що на даний час математична теорія таких сигналів відсутня, а значить відсутні будь-які аналітичні методи їх дослідження.

**Мета роботи:** розглянути приклади сигналів із змінним періодом, навести означення функції із змінним періодом, як їх математичної моделі, розглянути приклади тригонометричних функцій із змінним періодом та записати формули їх періодів, що в сукупності може бути покладене в основу наступних кроків створення теорії таких сигналів.

## 2. Приклад сигналів із змінним періодом

Вище вже йшла мова про наявність сигналів із змінним періодом. Наглядним прикладом тут є електрокардіограма, отримана під час чи після дії на організм пацієнта фізичного навантаження, і яку розглядають протягом деякого проміжку часу, поки пульс приходить в «норму». На рис. 1 наведені три відрізки електрокардіограми, кожний тривалістю 3 сек., взяті через певні проміжки часу після дії навантаження. На рис.1а) – електрокардіограма, отримана через 60 сек. після дії навантаження, на рис 1б) і 1в) – відповідно через 120 сек. і 180 сек. після навантаження. Аналізуючи графіки, видно, що форма електрокардіограми приблизно повторюється як на кожному із графіків, так і на різних графіках. Але при цьому легко бачити, що період повторюваності змінюється, а саме збільшується, та із плином часом стабілізується, що відповідає зменшенню частоти пульсу, або те саме, що збільшенню періоду повторюваності електрокардіограми. Очевидно, подібною до кардіограми буде поведінка спірограми, теж отриманої після дії навантаження чи іншого збудника психофізичного стану людини. Приклади аналогічних сигналів можна також навести із функціонування деяких технічних систем. Це може бути робота двигунів, дизель-генераторів в перехідних режимах, наприклад, після зміни зовнішнього навантаження. За даними Міжнародної служби обертання Землі добовий період обертання Землі є змінним.

а) 1 хвилина після навантаження

б) 2 хвилини після навантаження

в) 3 хвилини після навантаження

***Рис. 1. Відрізки електрокардіограми, отриманої після дії на організм пацієнта фізичного навантаження***

Наявність сигналів із змінним періодом ставить природні запитання щодо підходів та методів їх вивчення. Як показує огляд літературних джерел, ні теорії, ні загальних аналітичних методів дослідження таких сигналів не існує. Щодо електрокардіограм, як сигналів із змінним періодом, то, звичайно, що спеціалісти, а це, як правило, лікарі-терапевти, певним чином їх аналізують. Суть аналізу загалом зводиться до аналізу $R$-$R$ інтервалів. Зауважимо [1, с.85], що $R$-$R$ інтервал – це медичне поняття (термінологія), і являє собою віддаль між сусідніми $R$-зубцями електрокардіограми. В свою чергу $R$-зубець означає точку на електрокардіограмі, в якій вона приймає екстремальне, а саме, максимальне значення. $R$-зубці і $R$-$R$ інтервали добре видно на рис.1. На відрізку електрокардіограми 1а) таких $R$-зубців шість, а $R$-$R$ інтервалів п'ять, на відрізках 1б) і 1в) знаходиться по п'ять $R$-зубців і відповідно по чотири $R$-$R$ інтервали. При аналізі електрокардіограм спостерігається два підходи. Це традиційний підхід, коли спеціалісти зосереджуються на візуально-описовому аналізі $R$-$R$ інтервалів. В останній час широко використовується інформаційно-обчислювальні пристрої, з допомогою яких здійснюється вимірювання $R$-$R$ інтервалів та проводиться їх аналіз обчислювальними методами, зокрема методами математичної статистики. Звичайно, що ці та подібні їм методи загальної проблеми дослідження сигналів із змінним періодом не вирішують. Тому постає цілком закономірне питання – як досліджувати сигнали із змінним періодом, який для цього вибрати шлях, яким підходам віддати перевагу?

### 3. Загальний підхід до аналітичного вивчення сигналів із змінним періодом

Досвід багатьох науковців свідчить, що надзвичайно плідним тут вважається підхід, суть якого зводиться до тріади «модель – алгоритм – програма» [2, стр.8-9]. Згідно цього підходу на першому етапі вибирається (або обґрунтовується нова) модель («еквівалент») об'єкта, що відображає в математичній формі найважливіші його властивості: закони якими він підпорядковується; зв'язки, властиві його складовим тощо. Другий етап – вибір (чи розробка) алгоритмів для реалізації моделі на комп'ютері. Модель подається у формі, придатній для застосування числових методів, визначається послідовність обчислювальних і логічних операцій, які потрібно здійснити, щоб знайти шукані величини із заданою точністю. На третьому етапі створюються програми, що «перекладають» модель і алгоритми на доступну комп'ютерові мову. Основним в цьому підході є, безумовно, перший етап – обґрунтування моделі, оскільки від адекватності об'єкта і його моделі залежить успішність та достовірність розв'язків наступних задач тріади. Що стосується сигналів із змінним періодом, то вперше модель була запропонована в [3]. Розглянемо це важливе питання більш детально.

### 4. Поняття функції із змінним періодом

Для сигналів із змінним періодом найбільш характерними є дві особливості: повторюваність значень сигналу та змінність періоду цієї повторюваності. Яким чином врахувати ці особливості сигналу в його моделі, розглядалося в [3]. Як один із основних результатів цієї роботи – був введений клас функцій із змінним перioдом. Нагадаємо це поняття та деякі властивості змінного періоду.

**Означення**. Функція $f(x)$ дійсного аргументу $x \in I \subseteq R$ називається функцією із змінним періодом, якщо існує така функція $T(x) > 0$, якщо для всіх $x \in I$, таких, що $x + T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)) \tag{1}$$

Функція $T(x)$, яку назвемо змінним періодом, вважається диференційовною функцією.

Вважатимемо надалі, що область визначення $I = [a,b]$ в кожному конкретному випадку повинна уточнюватися, що буде зустрічатися нижче.

Із (1) випливає, що при $T(x) = T = const$ функція $f$ є звичайною періодичною функцією з постійним періодом $T$.

Приклад змінного періоду $T(x)$ показано на рис. 2. В точці $x_1$ період функції $f(x)$ дорівнює $T(x_1)$, тому значення функції в точках $x_1$ і $x_1 + T(x_1)$ рівні: $f(x_1) = f(x_1 + T(x_1))$. В точці $x_2$ періодом є число $T(x_2)$, причому значення періоду $T(x)$ в точках $x_1$ і $x_2$ різні: $T(x_1) > T(x_2)$.

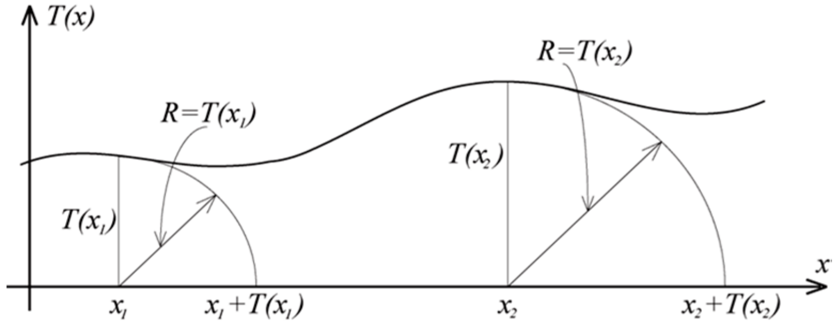


***Рис. 2. Змінний період $T(x)$, його значення в точках $x_1$ і $x_2$ та відповідні їм точки $x_1 + T(x_1)$ і $x_2 + T(x_2)$, в яких значення функції $f(x)$ повторюються.***

### 5. Змінний період $T^-(x)$ та його взаємозв'язок із періодом $T(x)$

Відомо, що для періодичної функції $g(x)$ з постійним періодом $T$ виконується рівність $g(x) = g(x + T) = g(x - T)$. Нескладні міркування, зокрема звернення до рис. 2, показують, що для функції $f(x)$ із змінним періодом $T(x)$ аналогічна рівність $f(x) = f(x + T(x)) = f(x - T(x))$ в загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент $x$ зменшується, змінний період повторюваності функції $f(x)$ позначимо через $T^-(x)$. При цьому, якщо $x$ і $x - T^-(x)$ належать області визначення $I$, то

$$f(x) = f(x - T^-(x)) \tag{2}$$

Наявність функцій із змінним періодом, як моделей відповідних сигналів, відкриває перспективу розробки методів їх дослідження – аналітичних, числових тощо. Враховуючи загальні положення теорії конструктивних функцій [4,5], для цього найперше необхідно, щоб в кожному конкретному випадку досліджувана функція була аналітичною. Це означає, що або вона сама безпосередньо є аналітичною, тобто задана деякою формулою, або подається (зображується) як певне наближення у вигляді деякого ряду, наприклад, ряду Фур'є, доданками якого є найпростіші аналітичні функції, що враховують змінність періоду. Але тут постає нове питання щодо наявності найпростіших (елементарних) аналітичних функцій із змінним періодом, які можна було б використати в задачах наближення.

Важливо відзначити, що такі функції знайдені, і ними є тригонометричні функції із змінним періодом. Приклади таких функції а також їх змінні періоди розглянемо більш детально.

### 6. Тригонометричні функції із змінним періодом та їх періоди

Один із методів отримання функцій із змінним періодом – це нелінійне перетворення (трансформація) аргументу періодичних функцій, і в першу чергу тригонометричних функцій. Для прикладу розглянемо найпростіші із періодичних функцій – $\sin t$ та $\cos t$. Нехай в свою чергу $t = x^\alpha, \alpha > 0, \alpha \neq 1$. В цьому випадку тригонометричні функції $\sin x^\alpha, \cos x^\alpha, \alpha > 0, \alpha \neq 1, x \in I$, є періодичними із змінними періодами. Область визначення

$I$ кожної із цих функцій залежить від значення $\alpha$ та парності функції, і може бути одним із інтервалів $[0,\infty)$ або $(-\infty,\infty)$. Для спрощення деяких міркувань будемо вважати, що $I=[0,\infty)$

Можна показати, що для тригонометричних функцій із змінним періодом має місце наступне

**Твердження.** Для функцій $\sin x^{\alpha}$ та $\cos x^{\alpha}, \alpha>0, x\geq 0$, їх змінні періоди $T_{\alpha}(x)$ та $T_{\alpha}^{-}(x)$ визначаються наступним чином:

$$T_{\alpha}(x)=-x+\left(x^{\alpha}+2\pi\right)^{1/\alpha},\ x\in[0,\infty) \tag{3}$$

$$T_{\alpha}^{-}(x)=x-\left(x^{\alpha}-2\pi\right)^{1/\alpha},\ x\in[T(0),\infty) \tag{4}$$

До цього твердження зробимо деякі зауваження.

- ✓ Коли не буде виникати непорозумінь, індекс $\alpha$ у виразах змінних періодів $T_{\alpha}(x)$ та $T_{\alpha}^{-}(x)$ іноді може опускатися.
- ✓ Якщо в виразах змінного періоду (3) і (4) параметр $\alpha=1$, то легко бачити, що в цьому частинному випадку періоди набувають значень $T_1(x)=2\pi$ і $T_1^{-}(x)=2\pi$, тобто отримуємо період функцій $\sin x$ і $\cos x$.
- ✓ Умова $x\in[T(0),\infty)$ у виразі (3) означає наступне. Коли рухатися вздовж осі $OX$ в сторону зменшення аргументу $x$, то враховуючи, що для функцій $\sin x^{\alpha}$ і $\cos x^{\alpha}$ їх область визначення $I=[0,\infty)$, для значень аргументу $x$, таких, що $0\leq x<T(0)$, не існує точок зліва від них, в яких би значення функцій $\sin x^{\alpha}$ і $\cos x^{\alpha}$ повторювалися через період $T_{\alpha}^{-}(x)$

## 7. Приклади тригонометричних функцій із змінним періодом та їх періоди

**Приклад 1.** На рис. 3 зображена функція $f_1(x)=\sin x^{3/4}, x\geq 0$ та для порівняння функція $f_2(x)=\sin x$.

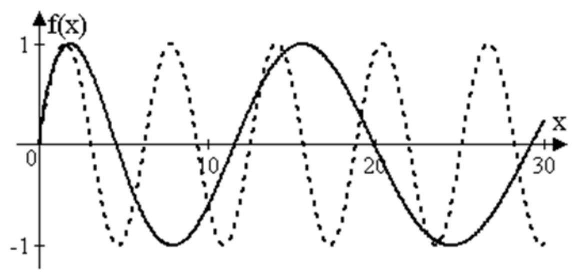


***Рис. 3. Функції*** $f_1(x)=\sin x^{3/4}$ ***(неперервна лінія),*** $f_2(x)=\sin x$ ***(пунктирна лінія).***

Аналізуючи графіки, видно, що функція $f_1(x)=\sin x^{3/4}$ із зростанням аргументу «розтягується», тобто її період при цьому зростає. На відрізку $[0,30]$ для цієї функції вкладається два періодичних коливання, для функції $\sin x$ на цьому ж інтервалі розміщується більше чотирьох коливань.

Враховуючи (3) і (4), для функції $f(x)=\sin x^{3/4}$ її зміні періоди

$$T(x)=-x+\left(x^{3/4}+2\pi\right)^{4/3},\ x\in[0,\infty),$$

$$T^{-}(x)=x-\left(x^{3/4}-2\pi\right)^{4/3},\ x\in[T(0),\infty),$$

Оскільки $T(0)=(2\pi)^{4/3}\approx 11.594$, то останній вираз ще можемо записати у вигляді

$$T^{-}(x)=x-\left(x^{3/4}-2\pi\right)^{4/3},\ x\in[11.594,\infty),$$

або $T^{-}(x)=x-\left(x^{3/4}-2\pi\right)^{4/3},\ x\geq 11.594$.

Графіки цих періодів показані на рис. 4. Для порівняння подано також період $T(x)=T=2\pi$ функції $\sin x$.

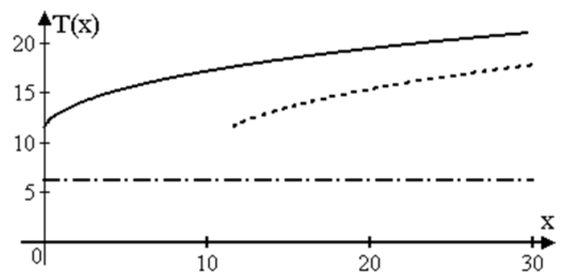


***Рис 4. Змінні періоди для функції*** $\sin x^{3/4}$***:*** $T(x)$ ***(неперервна лінія),*** $T^{-}(x)$, $x\geq(2\pi)^{4/3}\approx 11.594$ ***(пунктирна лінія) та період*** $T(x)=2\pi$ ***для функції*** $\sin x$ ***(штрих-пунктирна лінія).***

Поведінка періодів $T(x)$ та $T^{-}(x)$ підтверджує проведені вище міркування в прикладі 1 щодо поведінки самої функції $\sin x^{3/4}$. Так в точці $x=0$ період $T(0)=11.594$, для $x=15$ період $T(15)=18.427$, що перевищує значення $T(0)$ і свідчить про його зростання. В свою чергу період $T^{-}(15)=13.519$, і є меншим, ніж

$T(15) = 18.427$, що підтверджує поведінку самої функції $\sin x^{3/4}$: якщо в сторону зростання аргументу вона «розтягується», то в сторону зменшення аргументу ця функція, навпаки, – «стискається».

**Приклад 2.** Для випадку, коли $\alpha > 1$, на рис. 5 показана функція $f_1(x) = \sin x^{4/3}$, $x \geq 0$, (неперервна лінія), і для порівняння – функція $f_2(x) = \sin x$ (пунктирна лінія). Із рисунка видно, що із зростанням аргументу функції $\sin x^{4/3}$ «стискається», тобто період зменшується: коли на проміжку [0,15] вкладається дещо більше двох коливань функції $\sin x$, то функція $\sin x^{4/3}$ робить більше п'яти з половиною коливань.

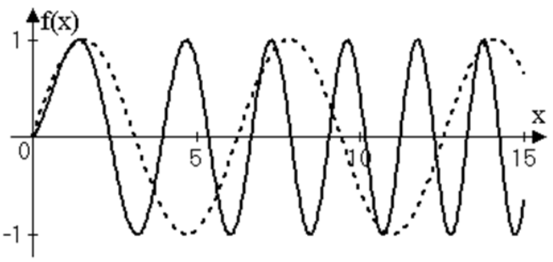


***Рис. 5. Функції:*** $f_1(x) = \sin x^{4/3}$ ***(неперервна лінія);*** $f_2(x) = \sin x$ ***(пунктирна лінія).***

Для функції $f(x) = \sin x^{4/3}$ її змінні періоди

$$T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4},\ x \in [0, \infty),$$

$$T^-(x) = x - \left(x^{4/3} - 2\pi\right)^{3/4},\ x \in \left[T(0) \approx 3.986, \infty\right).$$

Графіки цих періодів зображені на рис. 6. Для порівняння подано також період $T(x) = T = 2\pi$ функції $\sin x$.

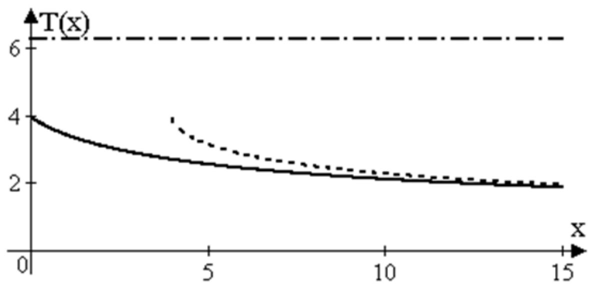


***Рис. 6. Змінні періоди для функції*** $\sin x^{4/3}$ ***:*** $T(x)$ ***(неперервна лінія);*** $T^-(x)$, $x \geq (2\pi)^{3/4} \approx 3.986$ ***(пунктирна лінія). Період*** $T = 2\pi$ ***для функції*** $\sin x$ ***(штрих-пунктирна лінія).***

Із рисунків видно, що із зростанням аргументу $x$ період $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$ спадає. Так, коли для $x = 0$ період $T(0) = 3.986$, то для $x = 10$ період $T(10) = 2.115$. Період $T^-(x) = x - \left(x^{4/3} - 2\pi\right)^{3/4}$, $x \in [3.986, \infty)$, навпаки, із зменшенням аргументу $x$ зростає.

Подібною до поведінки функцій $\sin x^{3/4}$ і $\sin x^{4/3}$ та їх періодів буде поведінка функцій $\cos x^{3/4}$ і $\cos x^{4/3}$ та їх періодів.

**Приклад 3.** Розглянемо ще тригонометричну функцію $tgx^{\alpha}$, $x \geq 0$. На рис.7 зображено графік функції $f(x) = tgx^{3/5}$ та для порівняння графік функції $tgx$.

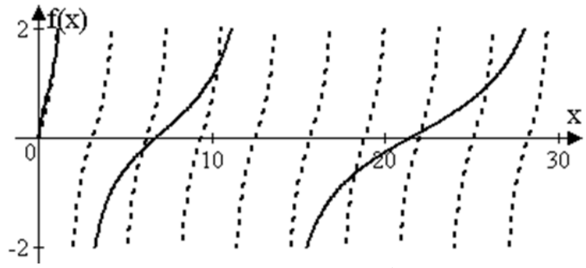


***Рис. 7. Графіки функцій*** $tgx^{3/5}$ ***(неперервні лінії) та*** $tgx$ ***(пунктирні лінії)***

Для функції $tgx^{3/5}$, $x \geq 0$, її зміні періоди

$$T(x) = -x + \left(x^{3/5} + \pi\right)^{5/3},\ x \in [0, \infty),$$

$$T^-(x) = x - \left(x^{3/5} - \pi\right)^{5/3},\ x \in \left[T(0) \approx 6.739, \infty\right),$$

подані на рис. 8. Для порівняння показано також період $T(x) = T = \pi$ функції $tgx$.

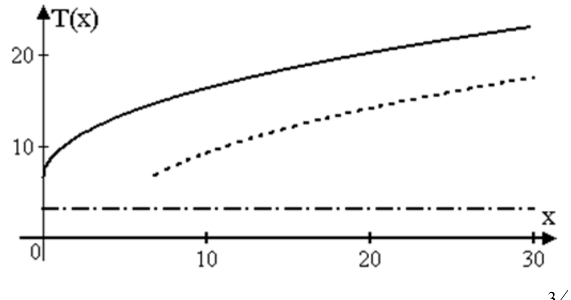


***Рис.8. Змінні періоди для функції*** $tgx^{3/5}$ ***:*** $T(x)$ ***(неперервна лінія),*** $T^-(x)$, $x \geq \pi^{5/3} \approx 6.739$ ***(пунктирна лінія). Період*** $T(x) = \pi$ ***(штрих-пунктирна лінія) для функції*** $tgx$***.***

Узагальнюючи міркування, висловлені у розглянутих вище прикладах, можна стверджувати, що для тригонометричних функцій $\sin x^{\alpha}$, $\cos x^{\alpha}$, $tgx^{\alpha}$, $ctgx^{\alpha}$, $x \in [0, \infty)$, при значеннях $\alpha$, таких, що $0 < \alpha < 1$, їх графіки із зростанням аргументу розтягуються, відповідно періоди є зростаючими функціями. При $\alpha > 1$ графіки цих функцій стискаються, а їх періоди є спадними функціями. В частинному випадку, коли $\alpha = 1$, отримаємо добре відомі функції $\sin x$, $\cos x$, $tgx$, $ctgx$, період яких є постійними: для функцій $\sin x$ і $\cos x$ період $T = 2\pi$, для $tgx$ і $ctgx$ період $T = \pi$.

Наявність розглянутих вище тригонометричних функцій із змінним періодом наштовхує на думку про побудову на цій основі тригонометричної системи функцій із змінним періодом та дослідження такої системи. Зрозуміло, що позитивне вирішення цих питань є в свою чергу передумовою розвитку теорії наближення функцій із змінним періодом, зокрема теорії рядів цих функцій. В цьому напрямку вже отримано ряд результатів, які планується опублікувати в наступних роботах.

## 8. Висновки

Звернено увагу на наявність сигналів із змінним періодом та наведено конкретний приклад таких сигналів. Запропоновано їх математичну модель сигналів у вигляді функції із змінним періодом та розглянуто деякі властивості змінного періоду. Розглянуто аналітичні приклади – тригонометричні функції із змінним періодом та в явному вигляді записані їх періоди. Наголошено, що отримані в роботі результати є основою розвитку теорії функцій із змінним періодом, зокрема теорії рядів Фур'є цих функцій та їх практичного використання в задачах електротехніки, кардіології тощо..

## Перелік посилань

1. Морман Д. Физиология сердечно-сосудистой системы / Д. Морман, Р. Хеллер. – СПб: Издательство «Питер», 2000. – 256 с.
2. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Приймак М.В. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом / М.В. Приймак, І.О. Боднарчук, С.А. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 132-141.
4. Бернштейн С.Н. Конструктивная теория функций / Бернштейн С.Н. – Издательство АН СССР, 1954. – 628 с. – (Собрание сочинений. [1931-1953]; Т.2).
5. Натансон И.П. Конструктивная теория функций / Натансон И.П. – М.-Л.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 454 с.