

## РЕДУКЦИЯ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ПРОСТЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Изложено методику редуцирования передаточных функций объектов управления, которая основывается на близости частотных характеристик исходной и редуцированной моделей в области частот, определяющих динамические свойства системы. Приведён пример решения задачи редукации с результатами математического моделирования.

Methodology of reduction the transmission functions of management objects is expounded. In basis of methodology the closeness of frequency descriptions is fixed by initial and reduction models in area of frequencies qualifying dynamic properties of the system. An example of decision of task of reduction is made with the results of mathematical design.

### Постановка проблемы

Наличие математической модели объекта управления является необходимым условием для синтеза устройств управления динамическими объектами разных типов. В большинстве случаев такой математической моделью является передаточная функция. При этом сложность регулятора зависит от порядка знаменателя передаточной функции объекта управления. На практике наибольший интерес вызывают регуляторы низкого порядка с фиксированной структурой (простые регуляторы) [1]. Упрощение регулятора актуально не только снижением вычислительной сложности, но и возможностью формировать алгоритмы управления на базе более простых контроллеров [2].

Одним из способов построения простых регуляторов является редуцирование передаточной функции объекта управления [1]. Суть редукации заключается в замене реальной передаточной функции, которая описывает динамику объекта, передаточной функцией низшего порядка, как правило второго [3, 4]. При этом упрощение должно проводиться так, чтобы суммарное значение энергий, моментов или некоторых других характеристик, которые накапливаются в течение переходного процесса, изменялись несущественно [4].

Редуцированию математических моделей объектов управления посвящено ряд публикаций, среди которых работы [1–5]. Однако использовать аналитические подходы [1, 2, 4] не всегда приемлемо из-за сложности математических преобразований, а применение численных методов, которые реализуются с помощью ЭВМ, предусматривает наличие соответствующего

программного обеспечения, которое реализует тот или иной численный метод [3, 5].

Альтернативными методами решения задачи редуцирования модели объектов управления являются те, которые не предусматривают сложных математических расчётов [3]. Наиболее простой способ заключается в разложении передаточной функции объекта на элементарные динамические звенья и отбрасывании тех множителей, которые не содержат наибольшую постоянную времени. Если передаточную функцию объекта разложить на звенья не удастся, то находят корни его характеристического уравнения. Большим значениям корней соответствуют быстро затухающие компоненты переходного процесса, которые мало влияют на поведение системы. Поэтому, корнями, которые на порядок больше остальных, пренебрегают.

Другой подход заключается в замене постоянных времени одним суммарным запаздыванием и сокращении нулей и полюсов исходной передаточной функции объекта [3]. Однако таким подходам присуща низкая точность из-за того, что редукация осуществляется лишь манипулированием постоянными времени и не предусматривают влияние коэффициента преобразования.

В связи с этим в работе предлагается несколько иной подход к решению задачи редукации передаточных функций объектов управления, которому не свойственны указанные замечания.

### Формулировка задачи исследования

Задача редукации математических моделей объектов управления ставится следующим образом. Предполагается, что реальная переда-

точная функция описывается выражением

$$K_0(p) = \frac{k_0}{p(1 + 2\xi T_k p + T_k^2 p^2)} \times \frac{1}{\prod_{i=1}^m (1 + T_i p)}, \quad (1)$$

где  $k_0$  - коэффициент преобразования;

$p$  - оператор Лапласа;

$T_i$  - постоянная времени  $i$ -го инерционного звена;

$T_k, \xi$  - постоянная времени и коэффициент затухания колебательного звена;

$m$  - количество инерционных звеньев.

Принимая во внимание необходимость сохранения порядка астатизма объекта, в качестве редуцированной [3] выбирается передаточная функция следующего вида

$$K(p) = \frac{k}{p(1 + Tp)} \quad (2)$$

здесь  $k$  и  $T$  - коэффициент преобразования и постоянная времени, которые необходимо рассчитать.

Критерием качества редуцирования является равенство значений интегральных оценок качества переходного процесса исходной  $J_0$  и редуцированной  $J$  моделей объектов управления

$$J_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt, \quad (3)$$

где  $\varepsilon(t)$  - рассогласование между входным воздействием и значением переходной характеристики  $h(t)$  замкнутой единичной обратной связью системы автоматического управления.

### Изложение основного материала

Известно, что адекватность математических моделей исходного и редуцированного объектов, охваченных единичной отрицательной обратной связью, определяется степенью близости их частотных характеристик [3]. Это утверждение положено в основу предлагаемого подхода.

В переходном режиме свойства замкнутой системы автоматического управления определяются в области частоты среза  $\omega_{cp}$  амплитудно-частотной характеристики разомкнутой части системы [6]. Поэтому реализовать редукцию представляется возможным сохранением у редуцированного объекта присущих реальной

модели объекта значений частоты среза  $\omega_{cp}$  и фазочастотной характеристики на этой частоте  $\varphi_0(\omega_{cp})$  как параметров, определяющих показатели качества переходного процесса.

Значение частоты среза может определяться из решения уравнения:

$$K_0(\omega) = 1,$$

где  $K_0(\omega)$  - амплитудно-частотная характеристика исходного объекта.

Такой подход предполагает выполнение соответствующих математических преобразований. Во избежание сложности математических расчётов, частоту среза предлагается определять путём построения асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристики исходного объекта

$$L_0(\omega) = 20 \lg K_0(\omega).$$

При выполнении равенства

$$L_0(\omega) = 0,$$

определяется частота среза.

Значение фазочастотной характеристики исходного объекта (1) на частоте среза рассчитываются следующим образом

$$\varphi_0(\omega_{cp}) = -\frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^m \arctg(\omega_{cp} T_i) - \arctg \frac{2\xi T_k \omega_{cp}}{1 - \omega_{cp}^2 T_k^2}. \quad (4)$$

Рассчитанные значения  $\omega_{cp}$  и  $\varphi_0(\omega_{cp})$  используются для расчёта неизвестных значений параметров редуцированной передаточной функции. В соответствии с (2) выражения для амплитудно-частотной  $K(\omega)$  и фазочастотной  $\varphi(\omega)$  характеристик редуцированного объекта принимают вид

$$K(\omega) = \frac{k\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}, \quad (5)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{1}{\omega T}\right). \quad (6)$$

Подставляя в уравнения (5) и (6) значения  $\omega_{cp}$  и  $\varphi_0(\omega_{cp})$  при выполнении равенств

$$\varphi(\omega_{cp}) = \varphi_0(\omega_{cp}),$$

$$K(\omega_{cp}) = 1,$$

выражения для расчёта коэффициента преобразования и постоянной времени редуцированной передаточной функции принимают следующий вид

$$T = \frac{1}{\omega_{cp} \operatorname{tg}(\varphi_0)}, \quad (7)$$

$$k = \frac{\omega_{cp} (1 + \omega_{cp}^2 T^2)}{\sqrt{1 + \omega_{cp}^2 T^2}}. \quad (8)$$

Обобщая изложенное, методика расчёта параметров редуцированной передаточной функции (2) включает следующие положения.

1. Определение частоты среза из построения асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристики исходного объекта.

2. Расчёт значения фазочастотной характеристики исходной передаточной функции объекта управления на частоте среза по выражению (4).

3. Расчёт постоянной времени и коэффициента преобразования редуцированной передаточной функции (2) по формулам (7) и (8).

Практическое использование методики рассматривается на примере. Предполагается, что передаточная функция объекта управления описывается выражением

$$K_0(p) = \frac{5}{p(1+0,5p)(1+0,1p)(1+0,05p)}.$$

Необходимо определить коэффициент преобразования  $k$  и постоянную времени  $T$  редуцированной передаточной функции (2).

По графику логарифмической амплитудно-частотной характеристики исходной модели (рис. 1) определяется частота среза  $\omega_{cp} = 3 \text{ рад/с}$ .

По выражению (4) рассчитывается значение фазочастотной характеристики на частоте среза  $\varphi_0(\omega_{cp}) = -170^\circ$ . Подстановкой значений  $\omega_{cp}$  и  $\varphi_0(\omega_{cp})$  в выражения (7) и (8) рассчитывается редуцированная передаточная функция

$$K(p) = \frac{17,3}{p(1+1,89p)}.$$

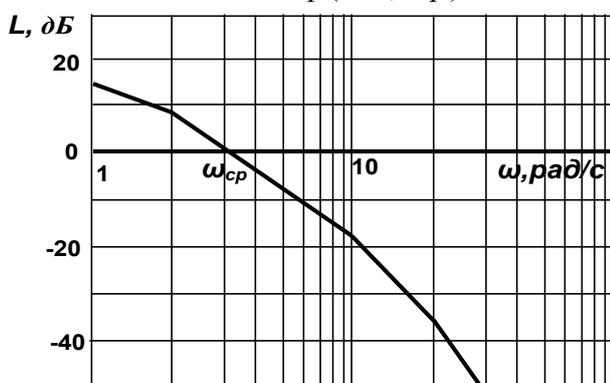


Рис. 1. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика исходной модели

Точность приближения полученного результата к исходной модели проводилась путём математического моделирования. Исследованию подлежали замкнутые единичной обратной связью системы автоматического управления, в которых передаточная функция разомкнутой системы представлена исходной (1) и редуцированной (3) передаточными функциями. Результаты моделирования в виде переходных характеристик систем управления с исходной моделью (1), и редуцированной для случаев, когда постоянная времени аппроксимирующей модели равна обобщённой постоянной времени ( $T = 0,65 \text{ с}$ ), а коэффициент усиления равен усилению объекта ( $k = 5$ ), и когда величина коэффициента усиления и постоянная времени определялись по изложенной методике, представлены на рис. 2, 3 и 4 соответственно.

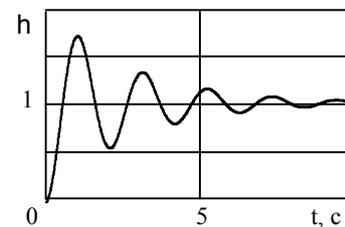


Рис. 2. Переходная характеристика исходной модели

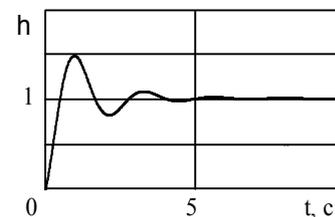


Рис. 3. Переходная характеристика известной модели

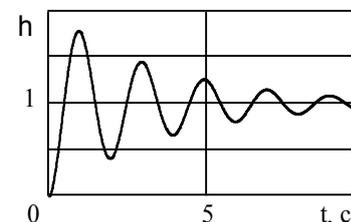


Рис. 4. Переходная характеристика синтезированной модели

При этом значения интегральных квадратичных оценок качества переходного процесса (3) соответственно равны:  $J_0 = 0,9899$ ;  $J_1 = 0,4248$ ;  $J_2 = 0,9732$ .

Из полученных результатов видно, что свойства замкнутой системы, в которой реали-

зована редуцированная по изложенной методике передаточная функция объекта, приближаются к исходной модели наилучшим образом.

### Выводы

В работе изложено методику редуцирования математической модели объекта управления, представленной в виде передаточной функции. Предложенный подход основывается на близости

частотных характеристик исходной и редуцированной моделей и не предусматривает проведения сложных математических расчетов. Процесс редуцирования иллюстрируется примером, а степень близости полученного результата к исходной модели подтверждена результатами математического моделирования.

### Список литературы

1. Бойченко В.А., Курдюков А.П., Тимин В.Н., Чайковский М.М., Ядыкин И.Б. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры. Управление большими системами / Сборник трудов. Выпуск 19. – М.: ИПУ РАН. – 2007. – С. 23 – 126.
2. Романова И. К. Современные методы редукиции нелинейных систем и их применение для формирования моделей движущихся объектов. / Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 2012. – С. 122 – 133.
3. Гостев В.И., Стеклов В.И., Скляренко С.Н. Оптимальные системы управления с цифровыми регуляторами: Справочник. - К.: КИРЦ «Сенс», 1995. – 484с.
4. Изерман Р. Цифровые системы управления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541с.
5. Суздаль В.С., Епифанов Ю.М. Редукция модели при синтезе регуляторов для управления кристаллизацией / Восточно-европейский журнал передових технологий. – Выпуск №3. – Том 2. – 2011. – С. 31 – 34.
6. Арсеньев Г.Н., Зайцев Г.Ф. Радиоавтоматика. Ч. 1. Теория линейных непрерывных систем автоматического управления РЭС. Учебник для вузов. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2008. – 480с..