

## ЗАДАЧА СОСТАВЛЕНИЯ ДОПУСТИМОГО РАСПИСАНИЯ С МАКСИМАЛЬНО ПОЗДНИМ МОМЕНТОМ ЗАПУСКА ВЫПОЛНЕНИЯ ИДЕНТИЧНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ РАБОТ С ОБЩИМ ДИРЕКТИВНЫМ СРОКОМ

В статье рассмотрены исследования свойств задачи составления допустимого расписания выполнения идентичными параллельными приборами работ с общим директивным сроком с максимально поздним моментом запуска. Применяя методологию построения ПДС-алгоритмов, разработаны признаки оптимальности расписаний, на основе которых определено множество перестановок, позволяющих последовательно улучшать значение критерия. Разработана полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма решения задачи. Рассмотрено практическое применение разработанного алгоритма. Проведены экспериментальные исследования алгоритма.

The article describes the properties research of the problem of creating a feasible schedule of jobs with the common due date on identical parallel machines with a maximum late start. Applying the methodology of PDC-algorithms the signs of optimal schedules are developed, which are defined on the basis of the permutations set that allow to consistently improve the value of the criterion. The polynomial component of the PDC-algorithm for the problem solution is developed. A practical application of the developed algorithm is considered. The experimental studies of the algorithm is given.

### 1. Введение

Рассматриваемая в работе задача относится к задачам теории расписаний, методы которой используются для оптимизации оперативно-календарных планов. Одним из типов оперативно-календарного планирования является цеховое планирование, в котором встречаются задачи, где в систему с идентичными приборами одновременно поступает некоторое количество работ и имеются ограничения на сроки запуска и выпуска продукции. При этом есть потребность в разработке таких алгоритмов построения расписаний, которые могут обеспечить высокое качество получаемых результатов и не требуют значительных вычислительных ресурсов.

### 2. Постановка задачи

Задано множество работ  $J$  ( $|J|=n$ ), количество приборов  $m$ , для работы  $j \in J$  известна продолжительность выполнения  $p_j$ . Предполагается, что все работы поступают одновременно и имеют общий директивный срок  $d$ , процесс обслуживания каждой работы протекает без прерываний до завершения обслуживания работ. Процесс выполнения работ каждым из приборов является непрерывным: после выполнения первой по порядку сразу же начинает выполняться вторая и т.д.

Необходимо найти расписание, в котором все работы не запаздывают и которое имеет максимально поздний момент запуска приборов (под *моментом запуска* понимается момент начала выполнения множества работ или минимальный из моментов начала выполнения работ из множества  $J$ ).

Рассматриваемая задача принадлежит к классу  $NP$ . Результаты, полученные ранее для этой задачи, приведены в работах [1, 2].

### 3. Исследование свойств задачи

Пусть  $C^* = \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^n p_j}{m} \right\rfloor$  (здесь  $\lfloor a \rfloor$  - наибольшее

целое, для которого выполняется  $\lfloor a \rfloor \leq a$ ),

$\delta = \sum_{j=1}^n p_j - C^* m$  (по определению  $\delta \geq 0$ ). Тогда

$C^*$  ( $C^* + 1$ ) - теоретически минимальное время, за которое все приборы могли бы выполнить все работы, если  $\delta = 0$  (если  $\delta > 0$ ).

Рассмотрим некоторое расписание  $\sigma$ . Введем обозначения:

$C_i(\sigma)$  – момент завершения выполнения всех

работ прибором  $i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;

$\Delta_i(\sigma) = \max \{0; C_i(\sigma) - C^*\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;

$$R_i(\sigma) = \max\{0; C^* - C_i(\sigma)\}, \quad i = \overline{1, m}$$

(далее  $R_i(\sigma)$  будем называть *резервом* прибора  $i$ ,  $\Delta_i(\sigma)$  *выступом* прибора  $i$ );

$I_\Delta(\sigma)$  - множество приборов, у которых  $\Delta_i(\sigma) > 0$ ;

$I_R(\sigma)$  - множество приборов, у которых  $R_i(\sigma) > 0$ ;

$I_0(\sigma)$  - множество приборов, у которых  $\Delta_i(\sigma) = R_i(\sigma) = 0$ ;

$J_i(\sigma)$  - множество работ, которые в расписании  $\sigma$  выполняются прибором  $i$ .

С учетом обозначений целевая функция задачи имеет вид:

$$r(\sigma) = d - (C^* + \max_i \Delta_i(\sigma)) = d - C^* - \max_i \Delta_i(\sigma).$$

Так как величины  $d$  и  $C^*$  не зависят от упорядочения, максимизация момента запуска  $r(\sigma)$  эквивалентна минимизации величины максимального из выступов  $\max_i \Delta_i(\sigma)$ .

Обозначим через  $\Psi$  класс расписаний, для которых выполняется:

$$\neg \exists h, j, s \mid h \in I_\Delta(\sigma), j \in J_h(\sigma), s \in I_R(\sigma), p_j \leq R_s(\sigma)$$

$$\text{и } \neg \exists h, j, s \mid h \in I_\Delta(\sigma), j \in J_h(\sigma),$$

$$s \in I_R(\sigma), p_j \leq \Delta_h(\sigma), R_s(\sigma) > 0.$$

Можно показать, что существует оптимальное расписание, принадлежащее классу расписаний  $\Psi$ .

Рассмотрим некоторые свойства расписаний  $\sigma \in \Psi$ .

**Утверждение.** Для произвольного расписания  $\sigma$  выполняется [1]:

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) + \delta.$$

Из этого утверждения, учитывая неотрицательность  $\delta$ , следует, что неравенство  $\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma)$

$< \sum_{i=1}^m R_i(\sigma)$  невозможно.

Применяя методологию построения ПДС-алгоритмов [3], согласно которой полиномиальная составляющая алгоритма порождается логико-аналитическими условиями, выполнение которых гарантирует оптимальность полученного решения, разработаем признаки оптимальности расписаний.

#### 4. Признаки оптимальности расписаний

Для расписания  $\sigma \in \Psi$  возможны такие взаимоисключающие случаи.

**Случай I:**  $\delta = 0$  и  $C_i = C^*$ ,  $i = \overline{1, m}$ . В этом случае имеем расписание с равномерной загрузкой приборов. Очевидно, что это расписание является оптимальным.

**Случай II:**  $\delta = 0$  и не для всех  $i$  выполняется  $C_i = C^*$ , при этом имеем:

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) > 0.$$

В этом случае построить расписание с равномерной загрузкой приборов возможно.

**Случай III:**  $\delta > 0$ , при этом имеем:

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) > \sum_{i=1}^m R_i(\sigma).$$

В этом случае построить расписание с равномерной загрузкой приборов невозможно.

А теперь сформулируем признаки оптимальности расписаний, к выполнению которых нужно стремиться.

##### Признак оптимальности 1

Равномерное расписание:  $\delta = 0$  и  $C_i = C^*$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

##### Признак оптимальности 2

Пусть,  $b$  - наибольший общий делитель (НОД) длительностей выполнения работ  $p_j, j = \overline{1, n}$ , тогда расписание, в котором для всех  $i = \overline{1, m}$  выполняется:  $\Delta_i(\sigma) \in \{0, b\}$  является оптимальным [2]. Если разделить величины  $p_j, j = \overline{1, n}$  на  $b$ , то признак оптимальности в этом случае формулируется так: расписание, в котором для всех  $i = \overline{1, m}$  выполняется условие  $\Delta_i(\sigma) \in \{0, 1\}$ , является оптимальным (далее будем предполагать, что все  $p_j$  имеют НОД, равный 1).

На основе признаков оптимальности расписаний определим множество перестановок, которые позволяют последовательно улучшать значение критерия.

#### 5. Перестановки, улучшающие расписания

Для улучшения расписания необходимо направить усилия на уменьшение максимального из выступов  $\max_{i \in I_\Delta} \Delta_i(\sigma)$ . Для этого предлагается использовать перестановки работ между приборами: когда некоторое подмножество ра-

бот с прибора  $h$  (обозначим его  $K_h(\sigma)$ ), по определению  $K_h(\sigma) \subseteq J_h(\sigma)$  меняется местами с некоторым подмножеством работ с прибора  $s$  (обозначим это подмножество как  $L_s(\sigma)$ ,  $L_s(\sigma) \subseteq J_s(\sigma)$ ). Обозначим через  $\theta$  разность между суммами длительностей работ, которые принимают участие в перестановке:

$$\theta = \sum_{j \in K_h(\sigma)} p_j - \sum_{j \in L_s(\sigma)} p_j.$$

Отметим, что в результате перестановок, примененных к текущему расписанию  $\sigma$ , в новом расписании  $\sigma^1$  для величин  $\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma^1)$  и

$\sum_{i=1}^m R_i(\sigma^1)$  выполняется:

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) - \sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma^1) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) - \sum_{i=1}^m R_i(\sigma^1).$$

Рисунок 1 иллюстрирует эту закономерность.

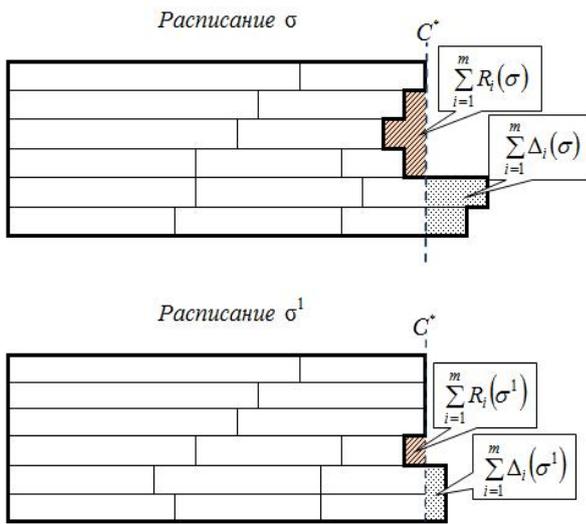


Рис. 1 Синхронное изменение суммы резервов и суммы выступов

Табл. 1. Свойства перестановок типа А

Тип перестановки	Приборы и работы, которые принимают участие в перестановке		$\theta$ ( $\theta > 0$ )	Условие, при котором выполняется перестановка	Характеристики расписания $\sigma^1$ , полученного в результате перестановки
	$h$	$s$			
1-1А	$h \in I_{\Delta}(\sigma),$ $j_1 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_2 \in J_s$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta \leq \Delta_h(\sigma),$ $\theta \leq R_s(\sigma)$	$\Delta_h(\sigma^1) = \Delta_h(\sigma) - \theta,$ $R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta.$
1-2А	$h \in I_{\Delta}(\sigma),$ $j_1 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_2, j_3 \in J_s$	$p_{j_1} - (p_{j_2} + p_{j_3})$		
2-1А	$h \in I_{\Delta}(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - p_{j_3}$		
2-2А	$h \in I_{\Delta}(\sigma)$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3, j_4 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - (p_{j_3} + p_{j_4})$		

Учитывая условия выполнения и последствия, все перестановки, которые приводят к улучшению расписания, можно разделить на четыре типа, которые условно обозначим как А, В, В и Г.

Цель перестановок типа А: уменьшение максимального из выступов  $\Delta_h(\sigma) = \max_{i \in I_{\Delta}(\sigma)} \Delta_i(\sigma)$  за счет уменьшения резерва одного из приборов множества  $I_R$ .

Условия выполнения перестановки типа А:

$$\theta > 0; \theta \leq \Delta_h(\sigma); \theta \leq R_s(\sigma).$$

В результате перестановки получаем расписание  $\sigma^1$  в котором:

$$\Delta_h(\sigma^1) = \Delta_h(\sigma) - \theta,$$

$$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta.$$

Выступ, который был максимальным в  $\sigma$ , уменьшился на  $\theta$ :

$$\Delta_h(\sigma^1) = \max_{i \in I_{\Delta}(\sigma)} \Delta_i(\sigma) - \theta.$$

Таким образом, расписание  $\sigma^1$  не хуже расписания  $\sigma$ , а при отсутствии альтернатив при выборе прибора  $h$  лучше, чем  $\sigma$ .

Перестановки типа А можно разделить на подтипы в зависимости от количества работ, которые участвуют в перестановке. В дальнейшем анализе количество подтипов перестановок ограничим величиной 2:  $\max\{|K_h(\sigma)|, |L_s(\sigma)|\} = 2$  (увеличение количества используемых подтипов приводит к повышению эффективности алгоритма, но увеличивает время его работы).

Обобщенная характеристика и свойства перестановок типа А представлены в таблице 1.

В результате перестановок типа **A** мощности множеств  $I_\Delta$  и  $I_R$  остаются неизменными или уменьшаются.

Цель перестановок типа **B**: уменьшение максимального из выступов за счет резерва прибора с множества  $I_R$  и с образованием выступления на этом же приборе. В результате перестановок этого типа может увеличиться мощность множества  $I_\Delta$ .

Условия выполнения перестановки типа **B**:

$$\theta > 0; \theta \leq \Delta_h(\sigma); \theta > R_s(\sigma).$$

В результате перестановки получаем расписание  $\sigma^1$ , в котором:

$$\begin{aligned} \Delta_h(\sigma^1) &= \Delta_h(\sigma) - \theta; \\ \Delta_s(\sigma^1) &= \theta - R_s(\sigma) > 0; \\ s &\in I_\Delta(\sigma^1). \end{aligned}$$

Выступ, который был максимальным в  $\sigma$ , уменьшился на величину  $\theta$ :

$$\Delta_h(\sigma^1) = \max_{i \in I_\Delta(\sigma)} \Delta_i(\sigma) - \theta,$$

а для вновь образованного выступления  $\Delta_s(\sigma^1)$  выполняется:  $\Delta_s(\sigma^1) < \Delta_h(\sigma)$ . Покажем это:

$$\begin{aligned} \Delta_h(\sigma) - \Delta_s(\sigma^1) &= \Delta_h(\sigma) - (\theta - R_s(\sigma)) = \\ &= \Delta_h(\sigma) + R_s(\sigma) - \theta > 0, \end{aligned}$$

поскольку,  $\Delta_h(\sigma) - \theta \geq 0, R_s(\sigma) > 0$ .

Таким образом, расписание  $\sigma^1$  не хуже расписания  $\sigma$ , а при отсутствии альтернатив при выборе прибора  $h$  лучше, чем  $\sigma$ .

Обобщенная характеристика и свойства перестановок типа **B** представлены в табл. 2.

Табл. 2. Свойства перестановок типа **B**

Тип перестановки	Приборы и работы, которые принимают участие в перестановке		$\theta$ ( $\theta > 0$ )	Условие, при котором выполняется перестановка	Характеристики расписания $\sigma^1$ , полученного в результате перестановки
	$h$	$s$			
1-1Б	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_2 \in J_s$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta \leq \Delta_h(\sigma),$ $\theta > R_s(\sigma)$	$\Delta_h(\sigma^1) = \Delta_h(\sigma) - \theta,$ $\Delta_s(\sigma^1) = \theta - R_s(\sigma)$
1-2Б	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_2, j_3 \in J_s$	$p_{j_1} - (p_{j_2} + p_{j_3})$		
2-1Б	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - p_{j_3}$		
2-2Б	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3, j_4 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - (p_{j_3} + p_{j_4})$		

Множество перестановок типа **B** приводит к тому, что мощность множества  $I_\Delta$  может увеличиться, но при этом величина максимального из выступов уменьшается. Следующее множество перестановок по условиям и последствиям является симметричным к множеству типа **B**.

Цель перестановок типа **B**: уменьшение максимального из выступов за счет резерва прибора из множества  $I_R$  с возможным перераспределением резервов и выступов. В результате перестановок этого типа изменяется состав множеств  $I_R$  и  $I_\Delta$ . В отличие от перестановок типа **A** и **B**, в перестановке этого типа, множество  $L_s(\sigma)$  может быть пустым.

Условия выполнения перестановки типа **B**:

$$\theta > 0; \theta > \Delta_h(\sigma); \theta \geq R_s(\sigma);$$

$$\Delta_h(\sigma) + R_s(\sigma) > \theta.$$

В результате перестановки получаем расписание  $\sigma^1$ , в котором:

$$R_h(\sigma^1) = \theta - \Delta_h(\sigma) > 0,$$

$$\Delta_s(\sigma^1) = \theta - R_s(\sigma).$$

При этом в новом расписании  $h \in I_R(\sigma^1), s \notin I_R(\sigma^1), \Delta_h(\sigma) > \Delta_s(\sigma^1)$  (то есть расписание  $\sigma^1$  не хуже, чем  $\sigma$ ).

Характеристики перестановок типа **B** представлены в таблице 3.

**Табл. 3. Свойства перестановок типа В**

Тип перестановки	Приборы и работы, которые принимают участие в перестановке		$\theta$ ( $\theta > 0$ )	Условие, при котором выполняется перестановка	Характеристики расписания $\sigma^1$ , полученного в результате перестановки
	$h$	$s$			
<b>1-0B</b>	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1 \in J_h$		$p_{j_1}$	$\theta > \Delta_h(\sigma),$ $\theta > R_s(\sigma)$	$R_h(\sigma^1) = \theta - \Delta_h(\sigma),$ $\Delta_s(\sigma^1) = \theta - R_s(\sigma)$
<b>1-1B</b>	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_2 \in J_s$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta > \Delta_h(\sigma),$ $\theta \geq R_s(\sigma)$	
<b>1-2B</b>	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_2, j_3 \in J_s$	$p_{j_1} - (p_{j_2} + p_{j_3})$		
<b>2-1B</b>	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - p_{j_3}$		
<b>2-2B</b>	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma),$ $j_3, j_4 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - (p_{j_3} + p_{j_4})$		

В таблице 4 рассмотрены все возможные соотношения между величинами  $\theta$ ,  $\Delta_h$  и  $R_s$ , а также указаны соответствующие им значения изменения частичной целевой функции (максимального из выступов приборов  $h$  и  $s$ ).

**Табл. 4. Влияние перестановок на значение целевой функции**

Условия	Тип перестановки	Уменьшение значения целевой функции по приборам $h$ и $s$
$\theta < \Delta_h, \theta \leq R_s$	<b>A</b>	$\theta$
$\theta = \Delta_h, \theta \leq R_s$	<b>A</b>	$\Delta_h$
$\theta \leq \Delta_h, \theta = R_s$	<b>A</b>	$\theta$
$\theta \leq \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor$		
$\theta \leq \Delta_h, \theta > R_s,$ $\theta \leq \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor$	<b>B</b>	$\theta$
$\theta \leq \Delta_h, \theta > R_s,$ $\theta \geq \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor + 1$	<b>B</b>	$\Delta_h + R_s - \theta$
$\theta > \Delta_h, \theta \geq R_s$	<b>B</b>	$\Delta_h + R_s - \theta$

Обобщим эти результаты: для выбранной пары приборов  $h - s$  перестановки **A**, **B** и **B** приводят к такому уменьшению значения максимального из выступов этих приборов:

$$\Delta_h(\sigma) - \max\{\Delta_h(\sigma^1), \Delta_s(\sigma^1)\} = \min\{\Delta_h(\sigma), \theta, \Delta_h(\sigma) + R_s(\sigma) - \theta\}$$

Когда нет возможности улучшения расписания перестановками **A**, **B** и **B** предлагается использовать перестановки типа **Г**, которые уменьшают значение  $\max_i \Delta_i(\sigma)$  за счет перераспределения выступов между приборами.

Условия выполнения перестановки типа **Г**:

$$\theta > 0; \theta < \Delta_h(\sigma); \theta < \Delta_h(\sigma) - \Delta_s(\sigma).$$

В результате перестановки получаем расписание  $\sigma^1$ , в котором:

$$\Delta_h(\sigma^1) = \Delta_h(\sigma) - \theta,$$

$$\Delta_s(\sigma^1) = \Delta_s(\sigma) + \theta.$$

При этом для расписания  $\sigma^1$  выполняется:

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma^1) = \sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma),$$

но  $\max\{\Delta_h(\sigma^1), \Delta_s(\sigma^1)\} < \max\{\Delta_h(\sigma), \Delta_s(\sigma)\}$ ,

то есть расписание  $\sigma^1$  не хуже, чем  $\sigma$ .

Для выбранной пары приборов  $h - s$  в результате перестановок типа **Г** получаем такое уменьшение значения максимального из выступов этих приборов в двух расписаниях:

$$\Delta_h(\sigma) - \max\{\Delta_h(\sigma) - \theta, \Delta_h(\sigma) + \theta\}.$$

Характеристики перестановок **Г** разных подтипов представлены в таблице 5.

**Табл. 5. Свойства перестановок типа Г**

Тип перестановки	Приборы и работы, которые принимают участие в перестановке		$\theta$ ( $\theta > 0$ )	Условие, при котором выполняется перестановка	Характеристики расписания $\sigma^1$ , полученного в результате перестановки
	$h$	$s$			
1-1Г	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1 \in J_h$	$s \in I_\Delta(\sigma) \cup I_0(\sigma),$ $j_2 \in J_s$	$p_{j_1} - p_{j_2}$		
1-2Г	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1 \in J_h$	$s \in I_\Delta(\sigma) \cup I_0(\sigma),$ $j_2, j_3 \in J_s$	$p_{j_1} - (p_{j_2} + p_{j_3})$	$\theta < \Delta_h(\sigma),$ $\theta < \Delta_h(\sigma) - \Delta_s(\sigma)$	$\Delta_h(\sigma^1) = \Delta_h(\sigma) - \theta,$ $\Delta_s(\sigma^1) = \Delta_s(\sigma) + \theta$
2-1Г	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_\Delta(\sigma) \cup I_0(\sigma),$ $j_3 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - p_{j_3}$		
2-2Г	$h \in I_\Delta(\sigma),$ $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_\Delta(\sigma) \cup I_0(\sigma),$ $j_3, j_4 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - (p_{j_3} + p_{j_4})$		

Эти перестановки положены в основу разработанной полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма решения задачи.

**6. ПДС-алгоритм решения задачи**

На основании признаков оптимальности и разработанного множества перестановок построен алгоритм определения максимально позднего момента начала выполнения работ параллельными приборами с общим директивным сроком в допустимом расписании.

В работе [1] приведен жадный алгоритм построения расписания  $\sigma^0$ , которое принадлежит классу расписаний  $\Psi$ . Это расписание может быть взято в качестве начального.

**Описание алгоритма**

**ШАГ 1** Построить начальное расписание  $\sigma^0$ ,  $\sigma = \sigma^0$ .

**ШАГ 2** Определить множества  $I_\Delta(\sigma)$  и  $I_R(\sigma)$

**ШАГ 3** Проверка выполнения признаков оптимальности

**ЕСЛИ** выполняется одна из признаков оптимальности

**ТО** перейти на **ШАГ 6** ( $\sigma$  – оптимальное расписание).

**ШАГ 4** Определить прибор  $h$ , которому соответствует максимальное значение выступа:  $\Delta_h(\sigma) = \max_{i \in I_\Delta} \Delta_i(\sigma)$ .

**ШАГ 5** Для прибора  $h$ , перебирая приборы  $s \in I_R(\sigma)$  выполнить перестановку типа **A**, **B** или **B**.

**ЕСЛИ** таких перестановок не нашлось, **ТО**

**5.1** Для прибора  $h$  перебирая все приборы  $s \in I_0(\sigma) \cup I_\Delta(\sigma)$  выполнить перестановку типа **Г**.

**5.2** **ЕСЛИ** таких перестановок не нашлось,

**ТО** перейти на **ШАГ 6**, **ИНАЧЕ** перейти на **ШАГ 2**.

**ИНАЧЕ** перейти на **ШАГ 2**.

**ШАГ 6** Определить максимально поздний момент запуска работ на выполнение в текущем расписании  $\sigma: r(\sigma) = d - (C^* + \max_i \Delta_i(\sigma))$ .

**КОНЕЦ АЛГОРИТМА**

Возможные варианты реализации ШАГА 5:

- 1) находим первую перестановку, которая улучшает расписание, и выполняем ее;
- 2) перебираем все допустимые перестановки, находим среди них самую эффективную и выполняем ее.

Сложность алгоритма составляет  $O(n^4W)$ ,

где  $W = \sum_{i=1}^n p_i$ .

Если для результирующего расписания  $\sigma$  выполняется один из признаков оптимальности, то это расписание является оптимальным. В противном случае целевая функция расписания  $\sigma$  отличается от ее оптимального значения на

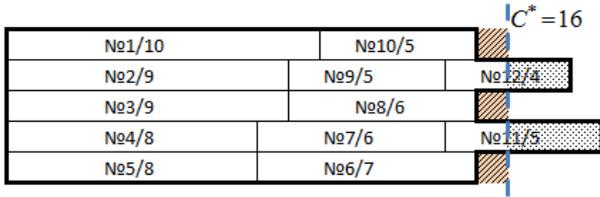
величину не более чем  $\max_i \Delta_i(\sigma)$  (если  $\delta = 0$ ),  $\max_i \Delta_i(\sigma) - 1$  (если  $\delta > 0$ ).

**7. Пример применения алгоритма**

Возьмем для примера задачу, в которой количество приборов  $m = 5$ ,  $n = 12$  работ, директивный срок  $d = 80$ .

Определим основные расчетные величины алгоритма:  $C^* = 16$ ,  $\delta = 2$ . Так как  $\delta > 0$ , то в процессе применения алгоритма нашим ориентиром является признак оптимальности 2.

Начальное расписание  $\sigma^0$ , построенное по алгоритму А0 [1], представлено на рисунке 2.



*Примечание:* Запись №1/10 означает: №1 – номер работы / 10 – длительность выполнения этой работы.

**Рис. 2. Начальное расписание  $\sigma^0$**

Для уменьшения количества возможных вариантов при решении данной задачи будем применять только перестановки подтипа 1-1.

**Итерация №1**

Для начального расписания  $\sigma^0$  имеем:  $C_1 = 15$ ,  $C_2 = 18$ ,  $C_3 = 15$ ,  $C_4 = 19$ ,  $C_5 = 15$ ;

$$I_0(\sigma^0) = \{0\};$$

$$I_\Delta(\sigma^0) = \{2;4\}; \Delta_2(\sigma^0) = 2, \Delta_4(\sigma^0) = 3;$$

$$I_R(\sigma^0) = \{1;3;5\}; R_1(\sigma^0) = 1, R_3(\sigma^0) = 1,$$

$$R_5(\sigma^0) = 1.$$

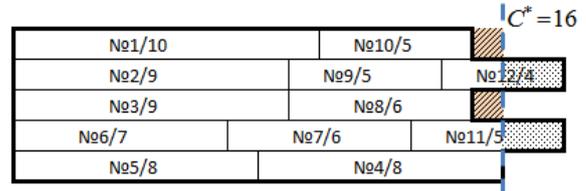
Определим приборы  $h \in I_\Delta(\sigma^0)$  и  $s \in I_R(\sigma^0)$ :  $h = 4$  (прибор с максимальным значением выступа),  $s = 5$  (один из приборов с максимальным значением резерва).

Определим, каким парам работ приборов 4 и 5 соответствуют допустимые перестановки. Для этого сначала выделим те пары работ, для которых  $\theta = p_{j_1} - p_{j_2} > 0$ , к ним относится пара работ 4-6. А потом проанализируем, как соотносятся величины  $\theta$ ,  $\Delta_4$  и  $R_5$ , то есть к какому из типов **A**, **B** или **B** относятся потенциальные перестановки. В таблице 6 приведены перестановки, которые являются допустимыми для пары приборов 4-5.

**Табл. 6. Параметры допустимых перестановок для пары приборов 4-5**

Пара работ	$\Delta_4$	$R_5$	$\theta$	$\Delta_4 + R_5 - \theta$	Величина улучшения	Тип перестановки
4-6	3	1	1	3	1	<b>A</b>

На рисунке 3 изображено расписание  $\sigma^1$ , полученное в результате этой перестановки.



**Рис. 3. Расписание  $\sigma^1$**

Для расписания  $\sigma^1$  не выполняется признак оптимальности 2, продолжаем работу алгоритма.

**Итерация №2**

Для текущего расписания  $\sigma^1$  имеем:  $C_1 = 15$ ,  $C_2 = 18$ ,  $C_3 = 15$ ,  $C_4 = 18$ ,  $C_5 = 16$ ;

$$I_0(\sigma^1) = \{5\};$$

$$I_\Delta(\sigma^1) = \{2;4\}; \Delta_2(\sigma^1) = 2, \Delta_4(\sigma^1) = 2;$$

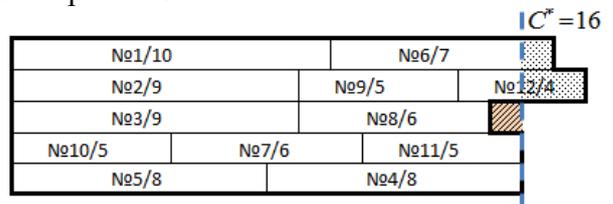
$$I_R(\sigma^1) = \{1;3\}; R_1(\sigma^1) = 1, R_3(\sigma^1) = 1.$$

Определим приборы  $h \in I_\Delta(\sigma^1)$  и  $s \in I_R(\sigma^1)$ :  $h = 4$  (один из приборов с максимальным значением выступа),  $s = 1$  (один из приборов с максимальным значением резерва). Для выбранных приборов допустимыми являются перестановки таких пар работ: 6-10, 7-10. В таблице 7 приведены параметры этих перестановок.

**Табл. 7. Параметры допустимых перестановок для пары приборов 4-1**

Пара работ	$\Delta_4$	$R_1$	$\theta$	$\Delta_4 + R_1 - \theta$	Величина улучшения	Тип перестановки
6-10	2	1	2	1	1	<b>B</b>
7-10	2	1	1	2	1	<b>A</b>

Последствия всех перестановок одинаковы, выберем перестановку работ 6-10 (первую в списке) и выполним ее. На рисунке 4 изображено расписание  $\sigma^2$ , полученное в результате этой перестановки.



**Рис. 4. Расписание  $\sigma^2$**

Для расписания  $\sigma^2$  не выполняется признак оптимальности 2, продолжаем работу алгоритма.

**Итерация №3**

Для текущего расписания  $\sigma^2$  имеем:  $C_1 = 17$ ,  $C_2 = 18$ ,  $C_3 = 15$ ,  $C_4 = 16$ ,  $C_5 = 16$ ;

$$I_0(\sigma^2) = \{4, 5\};$$

$$I_\Delta(\sigma^2) = \{1, 2\}; \Delta_1(\sigma^2) = 1, \Delta_2(\sigma^2) = 2;$$

$$I_R(\sigma^2) = \{3\}; R_3(\sigma^2) = 1.$$

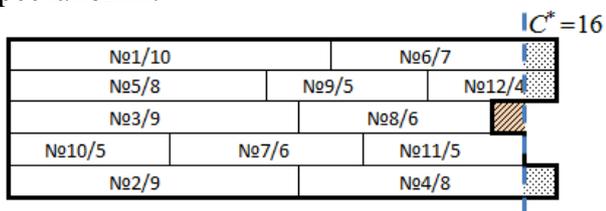
Определим приборы  $h \in I_\Delta(\sigma^2)$  и  $s \in I_R(\sigma^2)$ :  $h = 2$  (прибор с максимальным значением выступа,  $s = 3$  (единственный прибор с ненулевым значением резерва). Для выбранной пары приборов допустимых перестановок типов **A**, **B** и **B** нет. Переходим к применению перестановок типа **Г**. Определим прибор  $s \in I_0(\sigma^2) \cup I_\Delta(\sigma^2)$ :  $s = 5$  (прибор из множества  $I_0(\sigma^2)$ , отметим, что для пары приборов 2-4 допустимых перестановок нет).

Для выбранных приборов допустимыми являются перестановки таких пар работ: 2-5, 2-4. В таблице 8 приведены параметры этих перестановок.

**Табл. 8. Параметры допустимых перестановок для пары приборов 2-5**

Пара работ	$\Delta_2$	$\Delta_5$	$\theta$	$\Delta_2 + \Delta_5 - \theta$	Величина улучшения
2-5	2	0	1	1	1
2-4	2	0	1	1	1

Последствия всех перестановок одинаковы, выберем перестановку работ 2-5 (первую в списке) и выполним ее. На рисунке 5 изображено расписание  $\sigma^3$ , полученное в результате перестановки.



**Рис. 5. Расписание  $\sigma^3$**

Полученное расписание является оптимальным по признаку оптимальности 2. Определим для  $\sigma^3$  момент запуска, при котором все работы будут выполнены до директивного срока:

$$r(\sigma) = d - (C^* + \max_i \Delta_i(\sigma^3)) = 80 - (16 + 1) = 63.$$

**7. Экспериментальное исследование алгоритма**

**Классификация задач**

Качество результата алгоритма (степень близости к оптимуму) зависит от набора входных данных задачи. Интуитивно понятно, что для систем «на каждом из приборов выполняется достаточно большое количество работ, продолжительности которых не очень сильно отличаются друг от друга» и «на каждом из приборов выполняется небольшое количество работ, продолжительности которых сильно отличаются друг от друга» время работы и качество результатов алгоритма будут различными.

Для исследования того, как влияют начальные условия на получаемые результаты алгоритма, выделим следующие признаки, по которым задачи можно классифицировать:

- длительности работ;
- дисперсия длительностей работ.

**Длительность работ**

Пусть  $\bar{p}$  – среднее значение длительностей работ. Величина  $\frac{C^*}{\bar{p}}$  характеризует среднее количество работ, выполняющихся на каждом из приборов. Для разделения задач на классы введем величины  $G_L, G_M, G_S$  ( $G_L < G_M < G_S$ ).

В зависимости от соотношения величин  $\frac{C^*}{\bar{p}}$  индивидуальные задачи (задачи с конкретными определенными значениями  $m, n, d, p_i, i = \overline{1, n}$ ) будем относить к одной из категорий:

- категория **S** – задачи с "короткими" работами; к этой категории будем относить задачи, в которых:

$$G_M < \frac{C^*}{\bar{p}} \leq G_S;$$

- категория **M** – системы с "средними" работами; к этой категории будем относить системы, в которых:

$$G_L < \frac{C^*}{\bar{p}} \leq G_M;$$

- категория **L** – системы с "длинными" работами; к этой категории будем относить системы, в которых:

$$\frac{C^*}{\bar{p}} \leq G_L.$$

Значения граничных величин  $G_L, G_M, G_S$ , характеризующих категории (далее классифи-

кационные параметры), устанавливаются экспериментально (их значения определяются таким образом, чтобы рассматриваемые классы задач статистически отличались).

### Значение дисперсии длительностей работ

При моделировании множества работ будем предполагать, что длительности работ являются случайными величинами и имеют равномерное распределение. Это объясняется тем, что на практике для продолжительности работ обычно существуют верхняя и нижняя границы, в то время как случайные величины, имеющие другие распространенные распределения вероятностей (нормальный, экспоненциальный, Эрланга и т.д.) могут принимать отрицательные значения и/или значения, которые стремятся к бесконечности.

В зависимости от категории, к которой принадлежит задача по среднему значению длин работ, имеем значение  $\bar{p}$ . Но длительности работ в задаче могут быть как близкими к  $\bar{p}$ , так и значительно отличаться. Для моделирования этой ситуации введем параметр  $Q$  (определяется как доля от  $\bar{p}$ ). Он характеризует пределы интервала, на котором равномерно распределена случайная величина  $P$ , реализациями которой являются длительности работ в системе. То есть, все возможные значения  $p$  длительностей работ будут лежать в промежутке:

$$p_{\min} = \bar{p} \cdot (1 - Q) \leq p \leq \bar{p} \cdot (1 + Q) = p_{\max}.$$

Зная пределы интервала  $[a, b]$ , где  $a, b \in R, a < b$ , на котором равномерно распределена случайная величина  $X$ , можно вычислить для нее значение дисперсии:

$$D[X] = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

В нашем случае:

$$D[P] = \frac{(p_{\max} - p_{\min})^2}{12} = \frac{(2\bar{p} \cdot Q)^2}{12} = \frac{(\bar{p})^2 \cdot Q^2}{3}.$$

В зависимости от величины  $Q$  и, соответственно, значения дисперсии, индивидуальные задачи будут относиться к одной из категорий:

– категория  $S$  – задачи с малым рассеиванием; к этой категории будем относить задачи, в которых:

$$Q \leq V_S;$$

– категория  $M$  – задачи со средним рассеиванием; к этой категории будем относить задачи, в которых:

$$V_S < Q \leq V_M;$$

– категория  $L$  – задачи с большим рассеиванием; к этой категории будем относить задачи, в которых:

$$V_M < Q.$$

Для классификации задач далее будем использовать запись  $T_p/T_Q$ :

–  $T_p$  характеризует продолжительность работ,  $T_p \in \{S, M, L\}$ ;

–  $T_Q$  характеризует дисперсию длительностей работ,  $T_Q \in \{S, M, L\}$ .

Например, если  $G_S = 200, G_M = 100, G_L = 10, V_S = 0,1, V_M = 0,5$ , то к классу  $M/S$  относятся задачи, в которых при некотором заданном среднем значении длительностей работ  $\bar{p}$  средняя продолжительность выполнения всех работ одним прибором при равномерной загрузке  $C^*$  находится в промежутке:

$$11\bar{p} \leq C^* \leq 100\bar{p},$$

(то есть на приборе в среднем выполняется от 11 до 100 работ), а длины всех работ равномерно распределены на интервале:

$$0,9\bar{p} \leq p \leq 1,1\bar{p}.$$

### Результаты экспериментов

Для проведения экспериментов был разработан программный продукт, включающий в себя два модуля:

– модуль - генератор индивидуальных задач;

– модуль, в котором реализован ПДС-алгоритм.

Первый модуль позволяет генерировать индивидуальные задачи (заданных классов), для которых известно оптимальное расписание. Это позволяет для каждого результирующего расписания оценить степень достижения оптимума. Для классификации генерируемых задач были использованы такие параметры классификации:  $G_S = 200, G_M = 100, G_L = 10, V_S = 0,1, V_M = 0,5$ . Всего исследовано 9 классов задач ( $S/S, S/M, S/L, \dots, L/L$ ). Для каждого класса генерировалось достаточно большое количество индивидуальных задач (это количество подбиралось таким, что его небольшое изменение в ту или иную сторону, не приводило к изменению статистических характеристик алгоритма). При исследовании алгоритма анализировались:

- точність алгоритма (процент задач, в которых было достигнуто оптимальное расписание);
- степень достижения оптимума (относительное отклонение значения целевой функции в полученном расписании от известного оптимального значения);
- время нахождения результирующего расписания.

При этом исследовались такие варианты алгоритма: полный (с использованием всех подтипов перестановок) и упрощенный (с использованием только подтипов 1-1). Как и следовало ожидать, алгоритм проявил себя по-разному для разных классов задач. На рисунке 6 представлено влияние числа работ в системе на точность алгоритма.

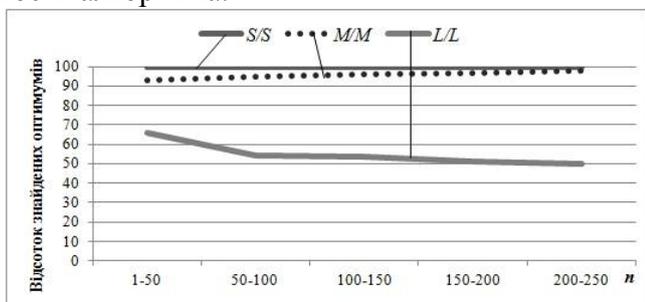


Рис. 6. Зависимость точности алгоритма от количества работ  $n$

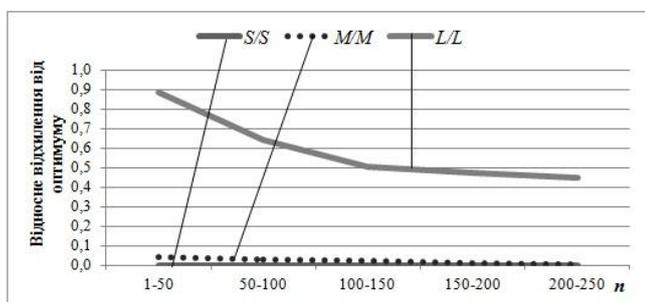


Рис. 7. Зависимость степени достижения оптимума от количества работ  $n$

На рисунке 7 представлено влияние числа работ в системе на степень достижения оптимума (для упрощенного варианта алгоритма).

На рисунке 8 показано влияние числа работ в системе на время работы алгоритма, использующего только перестановки 1-1 (расчеты производились на процессоре с тактовой частотой 2.10 GHz).

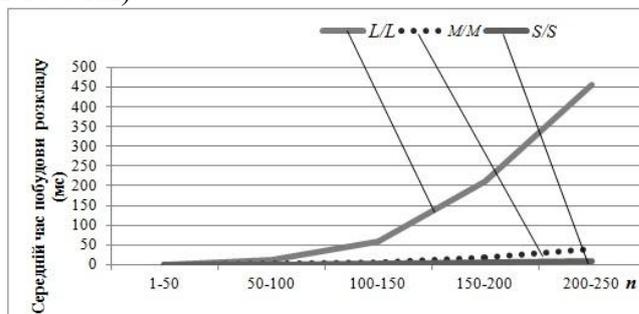


Рис. 8. Зависимость времени работы (мс) алгоритма от количества работ  $n$

Использование других подтипов перестановок улучшает характеристики алгоритма (точность и степень достижения оптимума), но увеличивает время работы.

## 8. Заключение

Исследованы свойства задачи составления допустимого расписания с максимально поздним моментом запуска выполнения идентичными параллельными приборами работ с общим директивным сроком. Применяя методологию построения ПДС-алгоритмов, разработаны признаки оптимальности расписаний. На основе этих признаков определено множество перестановок, которые позволяют последовательно улучшать значение критерия. Разработана полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма решения задачи. Приведен пример применения алгоритма. Проведены экспериментальные исследования алгоритма, которые показали его достаточно высокую точность.

## Список литературы

1. Павлов, О.А. Полиномиальная складовая ПДС-алгоритму розв'язання однієї задачі теорії розкладів / О. А. Павлов, О.Г. Жданова, О.Б. Місюра, М.О. Сперкач// Технологический аудит и резервы производства, 2013. — №6/3 (14). — С.47—52.
2. Павлов, А.А. Признаки оптимальности допустимых решений труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации / А. А. Павлов// Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». — К.: «ВЕК+», 2013. — №59. — С.4—12.
3. Згуровский, М. З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами [Текст]: монография / М. З. Згуровский, А. А. Павлов. — К.: Наукова думка, 2010.— 573 с.