УДК 621.391.2

РОЛИК А.И.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ МНОГОПОЗИЦИОННЫХ СИГНАЛОВ С МАРКОВСКИМ ИНФОРМАЦИОННЫМ ПАРАМЕТРОМ

Определено оптимальное правило выделения дискретного марковского информационного параметра сигналов из смеси кодированных М-ичных сигналов и аддитивного стационарного шума. Разработана процедура асимптотически оптимального приема в целом многопозиционных сигналов с марковским свойством. Процедура базируется на учете статистической зависимости значений информационного параметра соседних элементов сложных кодированных сигналов.

The rule for determining the discrete Markov information parameter M-ary signal is determined. Optimal receiving M-ary signals with the Markov property is developed. Receiving is based on the statistical dependence of the values of the information parameter the neighboring elements coded signals.

Введение

Для увеличения удельной скорости в системах передачи данных применяют многопозиционные (*М*-ичные) сигналы, т.е. сигналы, имеющие более двух возможных состояний одного или нескольких представляющих параметров. Известно [1—3], что системы передачи с ортогональными *М*-ичными сигналами более эффективно используют пропускную способность канала связи, а при $M \to \infty$ становятся оптимальными по Шеннону. Переход от двоичной модуляции к М-ичной без изменения межконцевой скорости передачи информации позволяет в $\log_2 M$ раз увеличить длительность элемента сигнала, что снижает влияние межсимвольных искажений [4] и в $\log_2 M$ раз увеличивает отношение сигнал-шум [5, 6]. Этим обеспечивается более высокая помехоустойчивость *М*-ичной модуляции по сравнению с двоичной или выигрыш по мощности при сохранении заданной верности передачи, что создало предпосылки для широкого использования систем передачи данных с многопозиционными сигналами и кодами.

При помехоустойчивом кодировании передаваемых данных в кодовых последовательностях может устанавливаться статистическая зависимость между соседними символами. Примером такого кодирования является предложенный в [7] многопозиционный код на основе перекрывающихся кодовых комбинаций.

Когда между значениями параметра элементов сигнала имеется статистическая связь, то разработку методов оптимального приема таких сигналов целесообразно производить с учетом этой априорно известной статистической зависимости [8, 9]. Эта задача должна решаться на фоне более общей задачи – разработки и исследования методов и средств обработки в целом марковских многопозиционных сигнально-кодовых конструкций. Решению этой задачи и посвящена данная статья.

Одной из наиболее действенных мер по повышению верности передачи данных по каналам связи низкого качества с высоким уровнем помех является применение сложных сигналов с избыточностью и осуществление приема в целом [3, 10, 11], где в частности показано, что прием в целом по параметрам помехоустойчивости значительно превосходит поэлементный прием и является асимптотически оптимальным. Прием в целом марковских сигналов имеет ряд особенностей [8, 9], обусловленных целесообразностью учета статистической взаимосвязи соседних элементов, априорно известной на приемной стороне. В [12-14] определены решающие правила и синтезированы оптимальные приемники в целом статистически зависимых ФМ сигналов. В [8, 9] рассмоткодированных сигналов. Однако, в общем виде задача приема в целом марковских многопозиционных сигналов остается нерешенной. В статье эта задача решается на примере приема многочастотных сигналов.

Определение оптимального правила выделения дискретного марковского параметра

Для синтеза устройств, осуществляющих обработку статистически зависимых сигналов и оценку дискретного марковского параметра, необходимо прежде всего определить оптимальное правило принятия решения. Имеются ставшие классическими работы [12-17], в которых на основе теории марковских процессов решается задача фильтрации дискретно-непрерывных сигналов на фоне различного вида помех. При этом, как правило, авторы ограничиваются рассмотрением случая, когда M=2, а для произвольного M>2 задача остается нерешенной.

Традиционно в многопозиционных системах передачи данных исходная бинарная последовательность передаваемой информации $\{c_l\}$, $c_l \in 0,1$, $l = 1,2,...$, символы в которой статистически независимы и равновероятны, преобразовывается в последовательность М-ичных символов $\{a_k\}$, $k = 1,2,...$, со значениями из множества $\tilde{A} = \{A_i, i = \overline{0, M-1}\}$ символов сигнального алфавита. В данной статье рассматривается случай, когда вследствие многопозиционного кодирования последовательность $\{a_k\}$ приобретает марковское свойство, т.е. между значениями смежных символов в последовательности $\{a_k\}$ устанавливается статистическая зависимость.

Предположим, что сопоставление каждому символу a_k из последовательности $\{a_k\}$ единичного элемента $s_k(t) = s(t, \vartheta_i, \overrightarrow{\lambda(t)})$, $t_k \le t \le t_{k+1}$ сложного составного сигнала происходит таким образом, что индекс i значения A_i символа a_k соответствует номеру i позиции $\vartheta_i = \Theta = \{\vartheta_i, i = \overline{0, M-1}\}$ представляющего параметра Ψ_k сигнала на k-м значащем интервале. Остальные параметры $\vec{\lambda}(t)$ сигнала считаются детерминированными и независимыми от значения символа a_k. При таком сопоставлении последовательность $\vec{\Psi} = \{\psi_k\}$ значений информационного параметра сигнала, определяемых значениями символов марковской цепи $\{a_k\}$, также будет цепью Маркова.

Если параметры цепи не зависят от k, она называется однородной [18] и полностью описывается вектор-строкой Π вероятностей начального состояния, состоящей из M элементов

$$\Pi = \|p_i\|, \tag{1}$$

где $p_i, i = \overline{0, M-1}$ определяет вероятность появления символа со значением A_i в начальном состоянии, и матрицей P_p вероятностей перехода размерности $M \times M$

$$P_p = \|p_{ij}\|, \tag{2}$$

где p_{ij}, $i, j = \overline{0, M-1}$ – вероятность перехода из состояния A_i в состояние A_j за один шаг.

В данном случае p_{ij} связывает пару символов A_i и A_j из алфавита $\tilde{A}$ и определяет вероятность того, что непосредственно за символом со значением A_i в последовательности $\{a_k\}$ следует символ со значением A_j.

Рассматривая кодовые последовательности М-ичных символов $\{a_k\}$, $k = 1,2,...$, как реализации марковского процесса, на основании свойств цепей Маркова [19, 20] априорную вероятность появления произвольной кодовой комбинации $A_i A_j A_r ... A_i A_r$ можно определить следующим образом:

$$p\{A_i A_j A_r ... A_i A_r\} = p_i p_{ij} p_{jr} ... p_{ir}. \tag{3}$$

Известно [19], что i, j-й элемент p_{ij}^{ν} матрицы P_p^{ν}, полученной возведением матрицы переходных вероятностей P_p в степень ν, $\nu = 1,2,...,$ будет определять вероятность того, что $a_{k+\nu} = A_j$ при $a_k = A_j$ и произвольном k. Если вероятность того, что $a_k = A_j$ на k-м значащем интервале равна $p_{i,k}$, то

$$p\{a_{k+\nu} = A_j | a_k = A_i\} = p_{i,k} p_{ij}^{\nu}. \tag{4}$$

При $p_{i,k} = 1$ начальная вектор-строка состояния $\Pi_{i,k}$, определяемая на k-м значащем интервале, будет содержать элемент, равный единице, в i-м столбце и все остальные элементы, равные нулю

$$\begin{array}{ccccccccc} i & = & 0 & 1 & ... & i & ... & M-1 & \\ \Pi_{i,k} & = & \| & 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \; \| \end{array}, \tag{5}$$

Тогда

$$p\{a_{k+\nu} = A_j | a_k = A_i\} = p_{ij}^{\nu}. \tag{6}$$

Из теории матриц известно, что умножение матрицы-строки $\Pi_{i,k}$ вида (5) на матрицу P_p^{ν} дает матрицу-строку $P_p^{\nu}(i)$

$$P_p^{\nu}(i) = \Pi_{i,k} P_p^{\nu}, \tag{7}$$

являющуюся i-й строкой матрицы P_p^{ν}

$$\begin{array}{ccccccc} j & = & 0 & 1 & ... & M-2 & M-1 \\ P_p^{\nu}(i) & = & \|p_{i0}^{\nu} & p_{i1}^{\nu} & ... & p_{i(M-2)}^{\nu} & p_{i(M-1)}^{\nu}\| \end{array}. \tag{8}$$

В матрице $P_p^{\nu}(i)$ j-й столбец определяет априорную вероятность того, что в последовательности $\{a_k\}$ символ со значением A_j располагается на ν-й позиции после символа со значением A_i.

Для оценки степени статистической зависимости значений M-ичных символов в кодовых последовательностях предлагается использовать коэффициент $K_{сз}$, значения которого изменяются на отрезке [0,1] и определяются по матрице P_p следующим образом:

$$K_{сз} = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\begin{pmatrix} M \\ H_i + M \end{pmatrix}^{\frac{H_i-1}{H_i}} \sum_{j=0}^{M-2}\left|p_{ij} - p_{i(j+1)}\right|, \qquad (9)$$

где H_i – количество ненулевых элементов в i-й строке матрицы P_p.

Коэффициент $K_{сз}$ равен нулю, когда значения символов в последовательности $\{a_k\}$ статистически независимы и равновероятны, и равен единице, когда значения M-ичных символов в последовательности $\{a_k\}$ полностью детерминированы.

Предположим, что на вход приемника из канала связи поступает аддитивная смесь полезного сигнала и белого гауссовского шума

$$\xi(t) = S(t, \overrightarrow{\Psi}, \vec{\lambda}(t)) + n(t), \qquad (10)$$

причем характеристики шума считаются известными

$$M[n(t)] = 0, \qquad (11)$$

$$M[n(t_1)n(t_2)] = \frac{1}{2}N_0\delta(t_2 - t_1), \qquad (12)$$

где N_0 — односторонняя спектральная плотность шума; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция.

Значения дискретного информационного параметра $\overrightarrow{\Psi} = \{\psi_k\}$ на фиксированных интервалах представляют собой конечную цепь Маркова, которая полностью описывается выражениями (1) и (2), а непрерывный параметр $\vec{\lambda}(t)$ может быть аппроксимирован многокомпонентным диффузионным процессом Маркова [21, 22]. При этом предполагается взаимная независимость случайных процессов $\overrightarrow{\Psi}$ и $\vec{\lambda}(t)$.

В таком случае при оптимальном приеме сигналов ставится задача определения алгоритма выделения дискретного информационного параметра $\overrightarrow{\Psi}$ по наблюдению реализации случайного процесса $\xi(t)$. При оптимальной нелинейной фильтрации дискретно-непрерывных процессов осуществляется решение двух задач, каждая из которых представляет особый интерес и может решаться вполне самостоятельно – определение алгоритмов и схем фильтрации непрерывных параметров и построение решающей схемы для оптимального определения оценки дискретного информационного параметра.

При поэлементном приеме в конце каждого значащего интервала времени $[t_k, t_{k+1} - \varepsilon] = [t_0 + kT, t_0 + (k+1)T - \varepsilon]$ на основании анализа реализации случайного процесса $\xi_{t_0}^{t_{k+1}-\varepsilon} = \{\xi(t), t \in [t_0, t_{r+1} - \varepsilon]\}$ выносится решение $\psi_k' = \vartheta_i'$ из множества решений Θ, $\Theta = \{\vartheta_i, i = \overline{0, M-1}\}$. Каждый элемент ψ_k' представляет собой оценку ϑ_i' значения информационного параметра $\psi_k = \vartheta_i$ элемента сложного сигнала, переданного на k-м значащем интервале. Пространство Ξ изменений реализаций случайного процесса $\xi(t)$ разбивается на M непересекающихся областей $\Xi_i \in \Xi$, $i = \overline{0, M-1}$ [8]. Тогда детерминированное правило принятия решения $\hat{\vartheta}(\xi)$ устанавливает соответствие между решениями ϑ_i' и областями Ξ_i так, что $\hat{\vartheta}_k(\xi_{t_0}^{t_k-\varepsilon}) = \vartheta_i'$. Такая запись означает принятие решения ϑ_i' на k-м значащем интервале, если $\xi_{t_0}^{t_k-\varepsilon} \in \Xi_i$. При этом задача сводится к разбиению пространства Ξ на области Ξ_i, $i = \overline{0, M-1}$ оптимальным образом и определения принадлежности $\xi_{t_0}^{t_k-\varepsilon}$ одной из областей [8]. Эта задача многоальтернативного решения [16] в ее математической постановке адекватна задачам, решаемым в теории распознавания образов [23].

Определим формулировку задачи при приеме в целом сложных кодированных статистически зависимых многопозиционных сигналов.

Предположим, что многопозиционный код порождает N кодовых комбинаций (кодовых векторов) $\vec{A}_\alpha = (A_{i1}, \dots, A_{iu})$, $\vec{A}_\alpha \in \vec{\mathrm{A}}$, $\alpha = \overline{1, N}$, $A_{ik} \in \mathrm{A}$, $i = \overline{0, M-1}$, $k = \overline{1, u}$ длиной u M-ичных символов, и каждый M-ичный символ передается по каналу связи единичным элементом многопозиционного сигнала отдельной позиции представляющего параметра. Здесь $\vec{\mathrm{A}}$ обозначает множество всех разрешенных кодовых комбинаций. Без потери общности будем считать, что номер значащей позиции ϑ_i параметра ψ_k элемента сигнала, передаваемого на k-м значащем интервале, равен значению символа A_{ik}, расположенного на k-й позиции в векторе

$\vec{A}_\alpha$. Кодовой комбинации $\vec{A}_\alpha$ будет соответствовать сложный сигнал $S_\alpha(t)$. Тогда, при приеме в целом ставится задача: по наблюдению реализации случайного процесса $\xi(t)$ вида (10) определить, какой из N сложных сигналов $S_\alpha(t)$, $\alpha=\overline{1,N}$ и соответствующая ему кодовая комбинация $\vec{A}_\alpha$, $\alpha=\overline{1,N}$ были переданы. Поставленная задача адекватна задаче различения N сигналов оптимальным образом. В этом случае в конце u-го значащего интервала, после получения всего сложного кодированного сигнала на основании наблюдения реализации $\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}$ случайного процесса $\xi(t)$ выносится решение $\hat{d}(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})=(\hat{d}=\vec{A}'_\alpha)$ о переданной кодовой комбинации.

В теории статистических решений для синтеза правил различения сигналов и оценки их параметров основным является байесовский метод [24]. Поиск оптимального байесовского решения [25], т.е. решения, минимизирующего средний риск R [26], заключается в определении решающего правила $d^*(\xi)$, для которого значение среднего риска будет наименьшим по отношению к каким-либо другим правилам выбора решений

$$R(d^*(\xi))=\min_{\hat{d}(\xi)} R(\hat{d}(\xi)). \qquad (13)$$

Средний риск R_u в конце u-го значащего интервала после приема всего сложного кодированного сигнала определяется как среднее значение потерь для всех возможных кодовых комбинаций

$$R_u(\hat{d}(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}))=\sum_{\alpha=0}^{N} p(\hat{d}=\vec{A}_\alpha) r_{\alpha u}, \qquad (14)$$

где $p(d=\vec{A}_\alpha)$ — априорная вероятность того, что $d=\vec{A}_\alpha$, $r_{\alpha u}$ — условный риск [26].

Значение $r_{\alpha u}$ условного риска решения $\hat{d}=\vec{A}_\alpha$ в конце u-го значащего интервала с учетом статистической независимости $\overleftrightarrow{\Psi}$ и $\vec{\lambda}(t)$ определяется следующим образом:

$$r_{\alpha u}=\sum_{\beta=1}^{N}\Pi(\hat{d}=\vec{A}_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha)\, p\{\hat{d}=\vec{A}_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha\}=$$
$$=\sum_{\beta=1}^{N}\Pi(\hat{d}=\vec{A}_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha)\, p\{\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\in\Xi_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha\}= \qquad (15)$$
$$=\sum_{\beta=1}^{N}\int_{\Xi_\alpha}\Pi(\hat{d}=\vec{A}_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha)\,\omega\{\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon} \,|\, d=\vec{A}_\alpha\}\,d\xi,$$

где $\Pi(\hat{d}=\vec{A}_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha)$ – функция потерь [25], т.е. «плата» за решение $\hat{d}=\vec{A}_\beta$ при фактической передаче комбинации $\vec{A}_\alpha$, что обозначено как $d=\vec{A}_\alpha$, причем $\vec{A}_\alpha\neq\vec{A}_\beta$, $\forall\alpha,\beta=\overline{1,N}$; $p\{\hat{d}=\vec{A}_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha\}$ – апостериорная вероятность принятия решения $\hat{d}=\vec{A}_\beta$, если в действительности передавалась комбинация $\vec{A}_\alpha$; $\omega\{\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon} \,|\, d=\vec{A}_\alpha\}$ – апостериорная плотность вероятности реализации процесса $\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}$ при условии $d=\vec{A}_\alpha$.

Средний риск в конце u-го значащего интервала можно представить как потери, усредненные по N возможным кодовым комбинациям и по пространству Ξ наблюдений [23]

$$R_k(\hat{d}(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}))=\sum_{\alpha=1}^{N} p(d=\vec{A}_\alpha)\sum_{\beta=1}^{N}\int_{\Xi_\beta}\Pi(\hat{d}=\vec{A}_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha)\,\omega\{\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon} \,|\, d=\vec{A}_\alpha\}\,d\xi=$$
$$=\int_{\Xi}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\Pi(\hat{d}=\vec{A}_\beta \,|\, d=\vec{A}_\alpha)\, p(d=\vec{A}_\alpha)\,\omega\{\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon} \,|\, d=\vec{A}_\alpha\}\,d\xi. \qquad (16)$$

Используя формулу Байеса для условных плотностей вероятностей [26], определим апостериорную вероятность $\hat{d}=\vec{A}_\beta$, если наблюдается реализация $\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}$

$$p(\hat{d}=\vec{A}_\alpha \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})=\frac{p(d=\vec{A}_\alpha)\,\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon} \,|\, d=\vec{A}_\alpha)}{\sum_{\beta=1}^{N} p(\hat{d}=\vec{A}_\beta)\,\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon} \,|\, d=\vec{A}_\beta)}=\frac{p(d=\vec{A}_\alpha)\,\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon} \,|\, \hat{d}=\vec{A}_\beta)}{\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})}, \qquad (17)$$

Откуда, учитывая, что $\hat{d}=\vec{A}_\beta$ соответствует $d=\vec{A}_\beta$, получим

$$p(d=\vec{A}_\alpha)\,\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon} \,|\, d=\vec{A}_\alpha)=p(\hat{d}=\vec{A}_\alpha \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})\,\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}). \qquad (18)$$

Подставив (18) в (16) и получим

$$R_u(\hat{d}(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})) = \int_{\Xi} \sum_{\alpha=1}^{N} \tilde{R}_{\alpha u}(\hat{d}(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}))\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})d\xi, \quad (19)$$

где

$$\tilde{R}_{\alpha u}(\hat{d}(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})) = \sum_{\beta=1}^{N} \Pi(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, d = \vec{A}_\alpha)\, p(d = \vec{A}_\beta \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) \quad (20)$$

– апостериорный риск [25] для решения $\hat{d} = \vec{A}_\alpha$

В [25] показано, что оптимальное байесовское решение $d^*(\xi)$ можно найти путем минимизации апостериорного риска (20). Там же доказано, что оптимальное правило $d^*(\xi)$, минимизирующее апостериорный риск, заключается в принятии в конце u-го интервала решения $\hat{d} = \vec{A}_\alpha$, если выполняется следующее неравенство

$$\tilde{R}_{\alpha u}(\hat{d}(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})) < \tilde{R}_{\chi u}(\hat{d}(\xi_{t_0}^{t_k-\varepsilon})), \quad (21)$$

т.е.

$$\sum_{\beta=1}^{N} \Pi(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, d = \vec{A}_\alpha)\, p(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) < \\ < \sum_{\beta=1}^{N} \Pi(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, d = \vec{A}_\chi)\, p(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}), \quad (22)$$

для всех $\chi = \overline{0, N}$, $\chi \neq \alpha$.

Для простой функции потерь

$$\Pi(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, d = \vec{A}_\alpha) = 1 - \delta_{\beta\alpha}, \quad (23)$$

где $\delta_{\beta\alpha}$ – символ Кронекера, первая цифра α подстрочного индекса которого обозначает выбранную гипотезу $\vec{A}_\beta$, а вторая β – истинную гипотезу $\vec{A}_\alpha$, неравенство (22) примет вид

$$\sum_{\substack{\beta=0 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} p(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) < \sum_{\substack{\beta=0 \\ \beta\neq\chi}}^{N} p(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) \quad (24)$$

для всех $\chi = \overline{0, N}$, $\chi \neq \alpha$.

Поскольку

$$\sum_{\substack{\beta=0 \\ \beta\neq\alpha}}^{N} p(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) = 1 - p(\hat{d} = \vec{A}_\alpha \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}), \quad (25)$$

то подставляя последнее в (24), получим следующее неравенство

$$1 - p(\hat{d} = \vec{A}_\alpha \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) < 1 - p(\hat{d} = \vec{A}_\chi \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}), \quad (26)$$

откуда

$$p(\hat{d} = \vec{A}_\alpha \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) > p(\hat{d} = \vec{A}_\chi \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) \quad (27)$$

для всех $\chi = \overline{0, N}$, $\chi \neq \alpha$.

Неравенство (27) определяет правило, по которому принимается решение в конце u-го значащего интервала при оптимальном приеме в целом кодированных M-ичных сигналов с марковским свойством. Таким образом, в конце u-го значащего интервала времени выносится решение $\hat{d} = \vec{A}_\alpha$ в пользу той кодовой комбинации, для которой апостериорная вероятность при наблюдении реализации $\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}$ имеет максимальную величину, т.е.

$$d^*(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) = \vec{A}_\alpha, \quad (28)$$

если

$$p(\hat{d} = \vec{A}_\alpha \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}) = \max_{\beta}\{p(\hat{d} = \vec{A}_\beta \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})\}, \quad (29)$$

$\beta = \overline{0, N}$.

Выражение (29) представляет собой обобщенное правило оптимального приема сигналов с марковским информационным параметром.

Прием в целом многочастотных марковских сигналов

Предположим, что система передачи данных использует сложные кодированные сигналы, единичный элемент которых описывается следующим образом:

$$s_k(t) = U_0 \cos(2\pi f_i t - \hat{\varphi}), \quad (30)$$

где U_0, $\hat{\varphi}$, f_i — соответственно амплитуда, фаза и частота элемента сигнала.

Задача приема в целом кодового вектора $\vec{A}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$ сводится к задаче различения N многочастотных сигналов оптимальным образом. При различении N сложных многопозиционных сигналов по максимуму апостериорной вероятности в соответствии с правилом (29) считается, что в реализации случайного процесса $\xi(t)$ присутствует сигнал, соответствующий той комбинации $\vec{A}'_\beta$, $\beta = \overline{1, N}$, для которой апостериорная вероятность $p(\hat{d} = \vec{A}'_\beta \,|\, \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon})$ имеет максимальное значение, т.е.

$$\vec{A}'_\beta = \max_\alpha{}^{-1}(p(\hat{d} = \vec{A}'_\beta \left| \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.)) = \{\vec{A}'_\beta : p(\hat{d} = \vec{A}'_\beta \left| \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.) = \max_\alpha(p(\hat{d} = \vec{A}'_\alpha \left| \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.)). \quad (31)$$

Для определения апостериорной вероятности кодового вектора $\vec{A}_\alpha$ распишем $p(\hat{d} = \vec{A}_\alpha \left| \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.)$ по формуле Байеса [26]

$$p(\hat{d} = \vec{A}_\alpha \left| \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.) = k_н p(d = \vec{A}_\alpha)\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\left| d = \vec{A}_\alpha\right.), \quad (32)$$

где $p(d = \vec{A}_\alpha)$ – априорная вероятность передачи кодовой комбинации $\vec{A}_\alpha$; $\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\left| d = \vec{A}_\alpha\right.)$ – условная плотность вероятности случайного процесса $\xi(t)$ при передаче сложного сигнала $S_\alpha(t)$; $k_н$ – нормирующий коэффициент, определяемый следующим образом:

$$k_н = (\sum_{\beta=1}^{N} p(\hat{d} = \vec{A}_\beta)\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\left| d = \vec{A}_\beta\right.))^{-1}. \quad (33)$$

Плотность вероятности $\omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\left| d = \vec{A}_\alpha\right.)$ при непрерывной обработке сигнала называется функционалом правдоподобия $L(\vec{A}_\alpha)$ [25, 12]

$$L(\vec{A}_\alpha) = \omega(\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\left| d = \vec{A}_\alpha\right.). \quad (34)$$

При обработке аддитивной смеси сигнала и шума вида (11), (12) $L(\vec{A}_\alpha)$ в соответствии с [13] определяется следующим образом:

$$L(\vec{A}_\alpha) = \exp(-\frac{1}{N_0}\int_{t_0}^{t_u-\varepsilon}(\xi(t) - S_\alpha(t))^2 dt) = k_1 \exp(\frac{2}{N_0}\int_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\xi(t)S_\alpha(t)dt), \quad (35)$$

где $$k_1 = \exp(-\frac{1}{N_0}\int_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\xi^2(t)dt)\exp(-\frac{\hat{E}_\alpha}{N_0}),$$

$\hat{E}_\alpha = \int_{t_0}^{t_u-\varepsilon} S_\alpha(t)dt$ – энергия сложного сигнала $S_\alpha(t)$.

В дальнейшем будем считать, что $\hat{E}_\alpha = \hat{E}$ и не зависит от α. Величина $\exp(-\frac{1}{N_0}\int_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\xi^2(t)dt)$ не зависит от информационных параметров сигнала и поэтому включена в постоянный множитель.

Представим сложный многочастотный сигнал $S_\alpha(t)$ в виде последовательности единичных элементов

$$S_\alpha(t) = \begin{cases} S_{\alpha 1}(t) \text{ при } t_0 \le t \le t_1, \\ \ldots \\ S_{\alpha 1}(t) \text{ при } t_{k-1} \le t \le t_k, \\ \ldots \\ S_{\alpha u}(t) \text{ при } t_{u-1} \le t \le t_u, \end{cases} \quad (36)$$

где $S_{\alpha k}(t)$, $k = \overline{1,u}$ – элемент сигнала, соответствующий M-ичному символу, расположенному на k-й позиции в комбинации $\vec{A}_\alpha$

При идеальной синхронизации и отсутствии межсимвольной интерференции в канале связи, интеграл в (36) можно разделить на сумму интегралов по отдельным значащим интервалам

$$L(\vec{A}_\alpha) = k_1 \exp(\frac{2}{N_0}\sum_{k-1}^{u}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\xi(t)S_{\alpha k}(t)dt) = k_1\prod_{k=1}^{u}L(A_{\alpha k}), \quad (37)$$

где $L(A_{\alpha k}) = \exp(\frac{2}{N_0}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\xi(t)S_{\alpha k}(t)dt)$ – функционал правдоподобия, определяемый на k-й временной позиции для комбинации $\vec{A}_\alpha$.

Для элементов сложного сигнала вида (30) с равномерным распределением фазы на интервале $[-\pi, \pi]$ (обычное предположение) после подставки (37) в (32) и ряда преобразований, описанных в [8], получим

$$p(\hat{d} = \vec{A}\left| \xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.) = k_2 p(d = \vec{A}_\alpha)\prod_{k=1}^{u} I_0(Y_{\alpha k}), \quad (38)$$

где $k_2 = k_н k_1$, $I(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, $Y_{\alpha k}$ – огибающая сигнала на выходе согласованного фильтра в момент времени $t = t_k$, резонансная частота которого равна частоте элемента $S_{\alpha k}(t)$ сигнала, соответствующего M-ичному символу, расположенному на k-й позиции в кодовой комбинации $\vec{A}_\alpha$.

Априорную вероятность $p(d = \vec{A}_\alpha)$ для произвольной комбинации $\vec{A}_\alpha$, $\alpha = \overline{1,N}$ в соответствии с (3) можно определить следующим образом:

$$p(d=\vec{A}_\alpha)=p(A_{\alpha 1})\prod_{k=2}^{u}p(A_{\alpha(k-1)}A_{\alpha k}), \qquad (39)$$

где $p(A_{\alpha 1})$ – вероятность того, что будет передан начальный символ $A_{\alpha 1}\in \mathrm{A}$ кодового вектора $\vec{A}_\alpha$; $p(A_{\alpha(k-1)}A_{\alpha k})$ – вероятность перехода значения M-ичного символа $A_{\alpha(k-1)}$, расположенного на (k-1)-й позиции в кодовой комбинации $\vec{A}_\alpha$, в значение символа $A_{\alpha k}$, расположенного на k-й позиции.

Подставив (39) в (38) получим

$$p(\hat{d}=\vec{A}\left|\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.)=k_2 p(A_{\alpha 1})I_0(Y_{\alpha 1})\prod_{k=2}^{u}p(A_{\alpha(k-1)}A_{\alpha k})I_0(Y_{\alpha k}). \qquad (41)$$

Коэффициент k_2 может быть определен из условия нормировки

$$k_2=(\sum_{\beta=1}^{N}p(A_{\beta 1})I_0(Y_{\beta 1})\prod_{k=2}^{u}p(A_{\beta(k-1)}A_{\beta k})I_0(Y_{\beta k}))^{-1}. \qquad (42)$$

Для определения апостериорных вероятностей всех кодовых комбинаций по формуле (41) необходимо выполнить $2uN$ операций умножения и операцию нормирования. Учитывая, что операция суммирования проще реализуема, чем операция умножения, а функция $p(\hat{d}=\vec{A}\left|\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.)$ неотрицательна, то, прологарифмировав обе части выражения (41), получим

$$\ln p(\hat{d}=\vec{A}\left|\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.)=\ln k_2+p(A_{\alpha 1})+\ln I_0(Y_{\alpha 1})+\sum_{k=2}^{u}(\ln p(A_{\alpha(k-1)}A_{\alpha k})+\ln I_0(Y_{\alpha k})). \qquad (43)$$

В этом случае правило принятия решения (32) будет иметь следующий вид

$$\vec{A}'_\beta=\max_{\alpha}{}^{-1}(\ln p(\hat{d}=\vec{A}'_\beta\left|\xi_{t_0}^{t_u-\varepsilon}\right.)), \qquad (44)$$

и устройство, реализующее прием в целом сложных многопозиционных частотно модулированных сигналов, обладающих марковским свойством, должно содержать M подканалов, в каждом из которых имеются последовательно соединенные согласованный фильтр, настроенный на отдельную позицию частоты, детектор огибающей, функциональный преобразователь, реализующий преобразование $\ln I_0(Y)$, и вычислительно устройство. В последнем для определения переданной кодовой комбинации необходимо выполнить $2uN$ операций суммирования и N операций сравнения для выполнения нормировки.

Отличительной особенностью разработанной процедуры приема в целом комбинаций статистически зависимых символов от традиционных процедур является то, что предлагаемая процедура основывается на учете марковского свойства кодовых комбинаций. При этом, например, для кода, предложенного в [7], отпадает необходимость хранения в приемном устройстве всех возможных кодовых комбинаций, а алгоритм приема отличается меньшим количеством вычислений, необходимых при практической реализации, по сравнению с алгоритмами, не учитывающими марковское свойство комбинаций M-ичных символов.

Таким образом, если многопозиционные коды формируют кодовые комбинации, обладающие марковским свойством, то для них можно создать достаточно простые алгоритмы приема в целом по максиму апостериорной вероятности, не требующие значительных вычислительных затрат. При этом в результате использования вычислительных процедур приемлемой для практической реализации сложности достигается максимум достоверности информационного обмена.

Выводы

Определено оптимальное правило выделения дискретного марковского информационного параметра сигналов из смеси кодированных сигналов и аддитивного стационарного шума, которое целесообразно использовать при синтезе средств, осуществляющих оптимальный прием М-ичных сигналов.

Разработана процедура асимптотически оптимального приема в целом марковских многопозиционных сигналов. Процедура базируется на учете марковского свойства информационного параметра сложных кодированных сигналов, что позволяет на ее основе синтезировать алгоритмы, отличающиеся незначительными вычислительными затратами.

Список литературы

1. Немировский М.С. Цифровая передача информации в радиосвязи / М.С. Немировский. М.: Связь, 1980. – 256 с.
2. Суворов Н.П. О развитии теории сигналов связи / Н.П. Суворов // Радиотехника. – 1985. – № 72. – С. 47-53.
3. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений / Л.М. Финк. 2-е изд., перераб. и доп. – М. Сов. Радио, 1970. – 728 с.
4. Фикс Я.А. Цифровые методы передачи информации по многолучевым каналам / Я.А. Фикс // Зарубежная радиоэлектроника. – 1982. – № 6. – С. 3-20.
5. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами / Л.Е. Варакин. М.: Радио и связь, 1985. – 385 с.
6. Зюко А.Г. Теория передачи сигналов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.М. Назаров, Л.М. Финк. – М.: Связь, 1980. – 288 с.
7. Катков Ф.А. Использование перекрывающихся комбинаций в многочастотных системах передачи данных / Ф.А. Катков, А.И. Ролик // Автоматика, 1988. – С. 61-63.
8. Ролик А.И. Оптимальный поэлементный прием многопозиционных зависимых сигналов / А.И. Ролик // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Сер. автоматика и электроприборостроение. Вып. 27, 1990. – С. 126-131.
9. Ролик А.И. Организация оптимального посимвольного приема статистически зависимых МЧМ сигналов / А.И. Ролик // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Сер. автоматика и электроприборостроение. Вып. 28, 1992. – С. 76-81.
10. Гинзбург В.В. Процедуры приема в целом сигналов с избыточностью / В.В. Гинзбург // Радиотехника. – 1978. Т. 33, № 11. – С. 20-33.
11. Машковский К.А. Вопросы помехоустойчивости систем связи, осуществляющих прием в «целом» // К.А. Машковский // Радиотехника. – 1958. – № 6. – С. 3-17.
12. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
13. Тихонов В.И. Оптимальная фильтрация дискретно-непрерывных процессов / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов, В.А. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 1978. – Т. 23, № 7. – С. 144-152.
14. Харисов В.Н. Оптимальный прием многочастотных сигналов со случайными параметрами // В.Н. Харисов, А.А. Черников // Изв. вузов. Радиоэлектрон. – 1981. – Т. XXIV, № 4. – С. 39-46.
15. Тихонов В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием /В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. – М.: Сов. Радио, 1975. – 704 с.
16. Ярлыков М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике/ М.С. Ярлыков. – М.: Сов. Радио, 1980. – 360 с.
17. Ярлыков М.С. Нелинейная фильтрация дискретно непрерывных марковских сигналов / М.С. Ярлыков, В.А. Смирнов // Радиотехника и электроника. –1975. Т. XX, Вып. 2. – С. 280-287.
18. Кемени Дж. Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
19. Кемени Дж. Счетные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл, А. Кнепп. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 416 с.
20. Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, В.А. Миронов. – М.: Сов. Радио, 1977. – 488 с.
21. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления / Р.Л. Стратонович. – М.: Из-во Моск. Гос. ун-та, 1966. – 319 с.
22. Харисов В.Н. Оптимальный прием многочастотных сигналов со случайными параметрами / В.Н. Харисов, А.А. Черников // Изв. вузов. Радиоэлектрон. – 1981. – Т. XXIV, № 4. – С. 39-46.
23. Петрик Э. Основы теории распознавания образов / Э. Петрик. – М.: Сов. Радио, 1980. – 408 с.
24. Трифонов А.П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А.П. Трифонов, Ю.С. Шинаков. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
25. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю.Г. Сосулин. – М.: Радио и связь, 1978. – 320 с.
26. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1974. – Т. 1. – 552 с.