УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
СПЕРКАЧ М.О.

ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЙ С ОБЩИМ ДИРЕКТИВНЫМ СРОКОМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ ПО КРИТЕРИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ: МИНИМИЗАЦИЯ СУММАРНОГО ОПЕРЕЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИРЕКТИВНОГО СТРОКА И МАКСИМИЗАЦИЯ МОМЕНТА ЗАПУСКА ЗАДАНИЙ НА ВЫПОЛНЕНИЕ

В статье исследуются свойства задачи построения допустимого расписания выполнения заданий с общим директивным сроком для параллельных приборов одновременно по двум критериям оптимальности: минимизация суммарного опережения относительно директивного строка и максимизация момента запуска заданий на выполнение. Разработаны достаточные признаки оптимальности расписаний. Приведен ПДС-алгоритм решения сформулированной задачи.

In the article the properties of the problem are researched to build a feasible schedule of tasks execution with a common due date for parallel machines with two simultaneous criteria of optimality: total earliness minimization regarding the due date and the tasks' start time execution maximization. The sufficient conditions of schedule's optimality are developed. The PDC-algorithm for the solution of the problem is given.

1. Введение

Рассматриваемая в работе задача относится к теории расписаний, методы которой используются для оптимизации оперативно-календарных планов производства. В частности приведенный ПДС-алгоритм решения этой задачи является составной частью алгоритмического обеспечения модели третьего уровня четырехуровневой иерархической модели календарного и оперативного планирования [1].

2. Постановка задачи

Задано множество заданий J ($|J| = n$), количество приборов m, для задания $j \in J$ известна продолжительность выполнения p_j. Предполагается, что все задания поступают одновременно и имеют общий директивный срок d ($d \in N$), процесс обслуживания каждого задания протекает без прерываний до завершения обслуживания заданий. Процесс выполнения заданий каждым из приборов является непрерывным.

Необходимо построить допустимое расписание выполнения заданий $j \in J$, у которого момент запуска заданий на выполнение r является максимальным либо суммарное опережение времени завершения выполнения заданий относительно директивного срока является минимальным. Результаты, полученные ранее для этой задачи, приведены в работе [2, 3, 4].

3. Исследование свойств задачи

Теорема. Для допустимого расписания критерии оптимальности: первый – максимально поздний момент запуска заданий на выполнение, второй – минимизация суммарного опережения относительно общего директивного срока, являются эквивалентными.

Доказательство. Рассмотрим произвольное допустимое расписание σ. Обозначим через $T_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{n_i} p_{i_j}$, где p_{i_j} – длительность i_j задания, которое j-тым выполняется на i-том приборе, n_i – количество заданий, которое выполняется на i-том приборе.

Пусть $T^*(\sigma) = \max_i T_i(\sigma),\ i = \overline{1,m}$ (рисунок 1).

Лемма. У допустимого расписания оптимального по первому критерию оптимальности, $T^*(\sigma)$ является минимально возможным.

Доказательство. Обозначим через $T^* = \min_{\forall \sigma \in \Omega} T^*(\sigma) = T^*(\sigma^*)$, где Ω – множество всех допустимых расписаний.

В этом случае, у допустимого расписания σ^* максимально поздний момент запуска приборов $r_{\max}$ равен $r_{\max} = d - T^* \geq 0$, и для любого другого допустимого расписания это число не может быть больше.

У расписания σ^* (оптимального по первому критерию) суммарное опережение равно

$mT^* - \sum_{j=1}^{n} p_j$. Так как $\sum_{j=1}^{n} p_j = const$, а T^* – минимально возможное, то у расписания σ^* суммарное опережение является минимально возможным.

Теорема доказана.

Следствие 1. Произвольное допустимое расписание σ, у которого $T^*(\sigma) = T^*$, а момент запуска приборов $r = d - T^*$ является оптимальным по первому и второму критерию.

В работе [4] для данной задачи рассмотрен критерий оптимальности максимизация момента запуска выполнения идентичными параллельными приборами заданий с общим директивным сроком. Для этого критерия были получены достаточные признаки оптимальности допустимого решения.

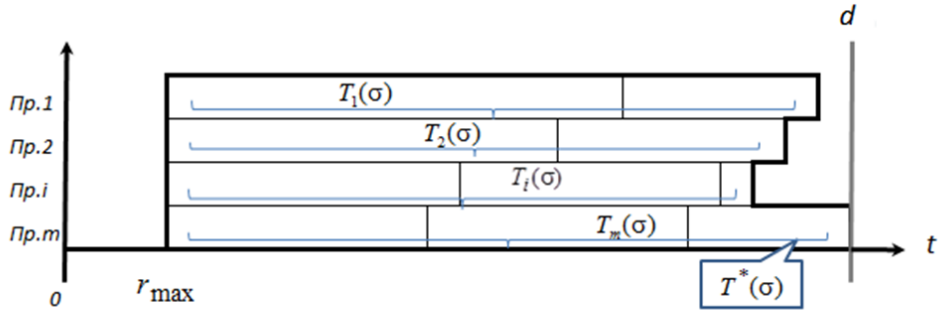

Рис.1. Расписание σ

Пусть $C^* = \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j}{m} \right\rfloor$ (здесь $\lfloor a \rfloor$ – наибольшее целое, для которого выполняется $\lfloor a \rfloor \le a$), $\delta = \sum_{j=1}^{n} p_j - C^* m$ (по определению $\delta \ge 0$).

Следствие 2. Сформулируем достаточные признаки оптимальности расписаний по первому и второму критерию [2].

Достаточный признак оптимальности 1

Допустимое расписание, у которого: $\delta = 0$ и $T_i(\sigma) = C^*$, $i = \overline{1,m}$, является равномерным и, следовательно, оптимальным, так как у него T^* является минимально возможным.

Достаточный признак оптимальности 2

Допустимое расписание, у которого $\delta > 0$ является оптимальным, если $\forall\ T_i(\sigma)$ выполняется: для любых $i \ne j$, i, $j = \overline{1,m}$, $|\,T_i(\sigma) - T_j(\sigma)\,| = 0 \vee b$, где b – наибольший общий делитель (НОД) чисел p_i такое, что $\forall i = \overline{1,n}$ числа p_i / b являются целыми, $p_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ – длительность i-го задания, произвольное рациональное число.

Изменим единицу измерения путем деления $p_i, i = \overline{1,n}$ на b. Далее будем предполагать, что все p_i имеют НОД, равный 1.

Можно показать, что в этом случае признак оптимальности имеет вид: $\Delta_i(\sigma) \in \{0,1\}$.

Следствие 3. Для критерия оптимальности максимизация момента запуска заданий на выполнение идентичными параллельными приборами с общим директивным сроком был приведен ПДС-алгоритм решения этой задачи [4]. Этот алгоритм является также эффективным и для решения задачи по критерию минимизация суммарного опережения относительно директивного строка.

Следствие 3 вытекает из теоремы, следствия 2 и следующего утверждения.

Утверждение. Пусть σ – произвольное допустимое расписание и момент запуска приборов $r(\sigma)$ равен $d - T^*(\sigma) \ge 0$ и суммарное опережение $\Sigma(\sigma)$ в этом случае равно $mT^*(\sigma) - \sum_{j=1}^{n} p_j$.

Тогда любая перестановка, переводящая допустимое расписание σ в допустимое расписание $\bar{\sigma}$, для которого:

1) $T^*(\bar{\sigma}) = T^*(\sigma)$ при $r(\bar{\sigma}) = r(\sigma)$ не изменяет для $\bar{\sigma}$ величину суммарного опережения $\Sigma(\sigma) = \Sigma(\bar{\sigma})$ (вытекает из равенства $T^*(\sigma) = T^*(\bar{\sigma})$).

2) Если $r(\bar{\sigma}) < r(\sigma)$, то $T^*(\bar{\sigma}) < T^*(\sigma)$ и, соответственно, $\Sigma(\bar{\sigma}) < \Sigma(\sigma)$.

Следовательно, все перестановки ПДС-алгоритма [4], улучшающие значение первого критерия являются улучшающимися перестановками и для второго критерия.

Утверждение доказано, так как ПДС-алгоритм [4] реализует только улучшающие перестановки по первому критерию.

На основании достаточных признаков оптимальности допустимых решений определим множество перестановок, которые позволят последовательно улучшать значение первого критерия. Эти перестановки положены в основу разработанной полиномиальной составляющей ПДС-алгоритма решения этой задачи.

Введем обозначения:

$C_i(\sigma)$ – момент завершения выполнения всех заданий прибором i, $i=\overline{1,m}$;

$\Delta_i(\sigma)=\max\{0;C_i(\sigma)-C^*\}$, $i=\overline{1,m}$;

$R_i(\sigma)=\max\{0;C^*-C_i(\sigma)\}$, $i=\overline{1,m}$

(далее $R_i(\sigma)$ будем называть резервом прибора i, $\Delta_i(\sigma)$ выступом прибора i);

$I_\Delta(\sigma)$ – множество приборов, у которых $\Delta_i(\sigma)>0$;

$I_R(\sigma)$ – множество приборов, у которых $R_i(\sigma)>0$;

$I_0(\sigma)$ – множество приборов, у которых $\Delta_i(\sigma)=R_i(\sigma)=0$;

$J_i(\sigma)$ – множество заданий, которые в расписании σ выполняются прибором i.

Перестановки, улучшающие расписания

Для улучшения расписания необходимо уменьшить длину максимального из выступов $\max\limits_{i\in I_\Delta}\Delta_i(\sigma)$. Для этого предлагается использовать перестановки заданий между двумя приборами, первый прибор h с максимальным значением $\max\limits_{i\in I_\Delta}\Delta_i(\sigma)$, а второй произвольный прибор s из множества $I_R(\sigma)$.

Некоторое подмножество заданий с прибора h (обозначим его $K_h(\sigma)$, по определению $K_h(\sigma)\subseteq J_h(\sigma)$) меняется местами с некоторым подмножеством заданий с прибора s (обозначим это подмножество, как $L_s(\sigma)$, $L_s(\sigma)\subseteq J_s(\sigma)$).

Обозначим через θ разность между суммами длительностей заданий, которые принимают участие в перестановке:

$$\theta=\sum_{j\in K_h(\sigma)}p_j-\sum_{j\in L_s(\sigma)}p_j\ .$$

Отметим, что, в результате таких перестановок, примененных к текущему допустимому расписанию σ, получим новое допустимое расписание σ^1.

В таблице 1 приведены условия, при выполнении которых приведенная перестановка улучшает первый критерий [4]. Таким образом, вводиться четыре типа перестановок, которые условно обозначим как ***А***, ***Б***, ***В*** и ***Г*** (см. табл.1).

Табл. 1. Характеристики и свойства перестановок

Тип перестановки	***Условия выполнения перестановки***	***Характеристики результирующего расписания σ^1***
А	$\theta>0$, $\theta\le\Delta_h(\sigma)$, $\theta\le R_s(\sigma)$	$\Delta_h(\sigma^1)=\Delta_h(\sigma)-\theta$, $R_s(\sigma^1)=R_s(\sigma)-\theta$.
Б	$\theta>0$, $\theta\le\Delta_h(\sigma)$, $\theta>R_s(\sigma)$	$\Delta_h(\sigma^1)=\Delta_h(\sigma)-\theta$, $\Delta_s(\sigma^1)=\theta-R_s(\sigma)$
В	$\theta>0$, $\theta>\Delta_h(\sigma)$, $\theta\ge R_s(\sigma)$	$R_h(\sigma^1)=\theta-\Delta_h(\sigma)$, $\Delta_s(\sigma^1)=\theta-R_s(\sigma)$
Г	$\theta>0$, $\theta<\Delta_h(\sigma)$, $\theta<\Delta_h(\sigma)-\Delta_s(\sigma)$	$\Delta_h(\sigma^1)=\Delta_h(\sigma)-\theta$, $\Delta_s(\sigma^1)=\Delta_s(\sigma)+\theta$

Схема алгоритма

ШАГ 1 Построить начальное расписание σ^0, $\sigma = \sigma^0$.

ШАГ 2 Определить множества $I_\Delta(\sigma)$ и $I_R(\sigma)$.

ШАГ 3 *Проверка выполнения признаков оптимальности*

ЕСЛИ выполняется один из признаков оптимальности

ТО перейти на **ШАГ 6** (σ – оптимальное расписание).

ШАГ 4 Определить прибор h, которому соответствует максимальное значение выступа: $\Delta_h(\sigma) = \max\limits_{i \in I_\Delta} \Delta_i(\sigma)$.

ШАГ 5 Для прибора h, перебирая приборы $s \in I_R(\sigma)$ выполнить перестановку типа ***А***, ***Б*** или ***В***.

ЕСЛИ таких перестановок не нашлось, **ТО**

5.1 Для прибора h перебирая все приборы $s \in I_0(\sigma) \cup I_\Delta(\sigma)$ выполнить перестановку типа **Г.**

5.2 ЕСЛИ таких перестановок не нашлось,

ТО перейти на **ШАГ 6**,

ИНАЧЕ перейти на **ШАГ 2.**

ИНАЧЕ перейти на **ШАГ 2.**

ШАГ 6 Определить максимально поздний момент запуска заданий на выполнение в текущем расписании σ: $r(\sigma) = d - \left(C^* + \max\limits_i \Delta_i(\sigma)\right)$.

КОНЕЦ АЛГОРИТМА

Возможные варианты реализации ШАГА 5:

1) находим первую перестановку, которая улучшает расписание, и выполняем ее;

2) перебираем все допустимые перестановки, находим среди них самую эффективную и выполняем ее.

Сложность алгоритма составляет $O\left(n^4 W\right)$, где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$.

Если для результирующего расписания σ выполняется один из признаков оптимальности, то это расписание является оптимальным. В противном случае целевая функция расписания σ отличается от ее оптимального значения на величину не более чем $\max\limits_i \Delta_i(\sigma)$ (если $\delta = 0$), $\max\limits_i \Delta_i(\sigma) - 1$ (если $\delta > 0$).

4. Заключение

Исследованы свойства задачи построения допустимого расписания выполнения заданий с общим директивным сроком для параллельных приборов одновременно по двум критериям оптимальности: минимизация суммарного опережения относительно директивного строка и максимизация момента запуска заданий на выполнение. Доказано, что если расписание оптимально по одному из критериев, то автоматически является оптимальным и по второму критерию. Разработаны достаточные признаки оптимальности расписаний. Приведен ПДС-алгоритм решения сформулированной задачи.

Список литературы

1. Згуровский М.З. Минимизация лексикографического критерия для допустимого расписания на независимых параллельных приборах с произвольными директивными сроками [Текст] / М.З. Згуровский, А.А. Павлов, Е.Б. Мисюра // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: “ВЕК+”, 2014. – №61. – с.4–17
2. Павлов, А.А. Признаки оптимальности допустимых решений труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации / А. А. Павлов// Вісник НТУУ “КПІ”. Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». — К.: “ВЕК+”, 2013. – №59. — С.4—12.
3. Павлов, О.А. Поліноміальна складова ПДС-алгоритму розв’язання однієї задачі теорії розкладів / О. А. Павлов, О.Г. Жданова, О.Б. Місюра, М.О. Сперкач// Технологический аудит и резервы производства, 2013. — №6/3 (14). — С.47—52.
4. Павлов О.А., Жданова О.Г., Сперкач М.О. Задача составления допустимого расписания с максимально поздним моментом запуска выполнения идентичными параллельными приборами работ с общим директивным сроком / О.А. Павлов, М.О. Сперкач, О.Г. Жданова // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: “ВЕК+”, 2014. – №61 – С.93-102.